

หนังสือ EXIMIUS: เขียนคณิตพิชิตโจทย์
แบบทดสอบชุดที่ 3

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 17 พฤษภาคม 2552

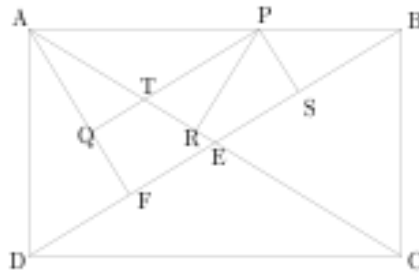
© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
ทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>

1. กำหนดให้ $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x} = 3 - 2\sqrt{2}$ จงหาค่าของ $\frac{2^{6x} - 2^{-6x}}{2^{2x} - 2^{-2x}}$
- ก. 1 ข. $3 + 2\sqrt{2}$ ค. 7 ง. 9
2. กำหนด $(x^2 - y^2)(x - y) = 16xy$ และ $(x^4 - y^4)(x^2 - y^2) = 640x^2y^2$ ถ้า x และ y ไม่เท่ากับ 0 จงหาค่าของ $x + y$
- ก. 0 ข. 12 ค. 9 ง. 15
3. ให้ a, b, c, d, e เป็นจำนวนเต็มแตกต่างกันที่ทำให้ $(45-a)(45-b)(45-c)(45-d)(45-e) = 45$ จงหาค่าของ $a + b + c + d + e$
- ก. 225 ข. 220 ค. 215 ง. 200
4. กำหนด $a * b = (a - 3)^{b-3} - \frac{1+2+3+\dots+a(b-1)}{a} - 1$
 จงหาค่าของ $\frac{(1*3)(2*5)(3*7)\dots(2007*4015)}{(3*1)(5*2)(7*3)\dots(4015*2007)}$
- ก. $\frac{1}{2007^2}$ ข. 2007^2 ค. $2007^2 + 1$ ง. 0
5. ให้ \oplus เป็นการดำเนินการในจำนวนเต็ม กำหนดโดย $a \oplus 1 = a'$, $a \oplus b' = (a \oplus b)'$ และ $a' = a + 2$
 จงหาค่าของ $5 \oplus 7$
- ก. 13 ข. 12 ค. 10 ง. 8
6. กำหนดสามเหลี่ยม ABC มี $BC = 1$ เซนติเมตร โดยที่มุม ABC และ BAC มีขนาด 60 และ 100 องศา ตามลำดับ ถ้า D และ E เป็นจุดบนด้าน AC และ BC ตามลำดับ โดยที่ $AD = CD$ และมุม EDC มีขนาด 80 องศา จงหาค่าของ $[ABC] + 2[CDE]$ เมื่อกำหนดสัญลักษณ์ $[XYZ]$ แทนพื้นที่ของสามเหลี่ยม XYZ
- ก. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ตารางเซนติเมตร ข. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ตารางเซนติเมตร
 ค. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ตารางเซนติเมตร ง. $\frac{\sqrt{3}}{16}$ ตารางเซนติเมตร
7. สนามหญ้าแห่งหนึ่งมีหญ้างอกสม่ำเสมอ ถ้ากำหนดให้
- วัว 1 ตัว ม้า 2 ตัว แพะ 3 ตัว ช้าง 4 ตัว กินหญ้าหมดทั้งสนามใน 2 วัน
 วัว 2 ตัว ม้า 6 ตัว แพะ 12 ตัว ช้าง 20 ตัว กินหญ้าหมดทั้งสนามใน 4 วัน
 วัว 6 ตัว ม้า 15 ตัว แพะ 28 ตัว ช้าง 45 ตัว กินหญ้าหมดทั้งสนามใน 8 วัน
 วัว 15 ตัว ม้า 31 ตัว แพะ 53 ตัว ช้าง 81 ตัว กินหญ้าหมดทั้งสนามใน 16 วัน
- จงหาว่า วัว 31 ตัว ม้า 56 ตัว แพะ 89 ตัว ช้าง 120 ตัว จะกินหญ้าหมดทั้งสนามภายในกี่วัน
- ก. 29 วัน ข. 30 วัน ค. 31 วัน ง. 32 วัน

8. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ให้ P เป็นจุดใดๆ บน AB โดย $PS \perp BD$, $PR \perp AC$, $AF \perp BD$ และ $PQ \perp AF$ ข้อใดมีค่าเท่ากับ $PR + PS$ เสมอ



- ก. AF ข. AE ค. PQ ง. EF
9. เช็ตจิ้งและโคโนจิ้งเล่นเกมกันโดยทั้งคู่ผลัดกันวางหมากกลางบนกระดาน โดยห้ามวางหมากให้อยู่ในแนวทแยงมุมเดียวกันกับหมากที่มีอยู่แล้วบนกระดาน ใครไม่สามารถวางหมากต่อได้เป็นฝ่ายแพ้ ถ้าทั้งคู่เล่นเกมนี้สองครั้ง บนกระดานขนาด 3×3 และ 6×6 โดยเช็ตจิ้งเป็นฝ่ายเริ่มก่อนทั้งสองเกม และทั้งสองคนเล่นด้วยกลยุทธ์ที่ดีที่สุด ใครจะเป็นฝ่ายชนะในสองเกมนี้
- ก. เช็ตจิ้งชนะทั้งสองเกม
 ข. เช็ตจิ้งชนะในกระดาน 3×3 โคโนจิ้งชนะในกระดาน 6×6
 ค. โคโนจิ้งชนะในกระดาน 3×3 เช็ตจิ้งชนะในกระดาน 6×6
 ง. โคโนจิ้งชนะทั้งสองเกม
10. สี่เหลี่ยมจัตุรัสและแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีพื้นที่เท่ากัน จงหาอัตราส่วนของความยาวด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสต่อความยาวด้านของแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
- ก. $\sqrt{2 - 2\sqrt{2}}$ ข. $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ ค. $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ ง. $\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$
11. ให้ $A = \frac{1}{\frac{1}{2007^2} + \frac{1}{2008^2} + \frac{1}{2009^2} + \dots + \frac{1}{2549^2}}$
 จงหาจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่มีค่าไม่เกิน $\frac{A}{50}$
- ก. 184 ข. 186 ค. 188 ง. 190
12. กำหนด α, β, γ เป็นรากของสมการ $x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$
 จงหาสมการที่มีรากเป็น $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ และ $\gamma + \alpha$
- ก. $x^3 - 14x^2 + 50x - 13 = 0$ ข. $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$
 ค. $x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$ ง. $x^3 + 12x - 5x + 7 = 0$

13. ให้

A เป็นค่าเฉลี่ยของ 11, 25, 31, 42, 28, 19, 37, 11, 2, 7, 32, 11, 4

B เป็นมัธยฐานของ 7, 9, 5, 12, 7, 36, 25, 11, 2, 7, 1, 5, 9, 7, 117

C เป็นฐานนิยมของ 15, 9, 23, 11, 5, 24, 29, 17, 15, 1, 5, 25, 5, 9

D เป็นพิสัยของ 7, 9, 25, 14, 26, 38, 17, 24, 5, 19, 28, 19, 17, 26, 17

จงหาค่าของ $(A \times B) - (B \times C) + (C \times D) - (D \times A)$

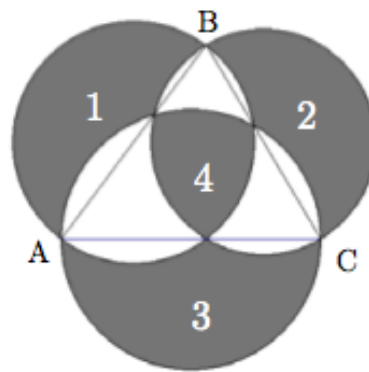
ก. 300

ข. 390

ค. -300

ง. -390

14. ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม สร้างวงกลม 3 วงที่มีด้าน AB , BC และ CA เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ดังรูป ถ้า $AB = 15$, $AC = 14$, $BC = 13$ และพื้นที่ที่แรเงาส่วนที่ 1, 2, 3 และ 4 มีค่า a, b, c และ d ตารางหน่วยตามลำดับ จงหาค่าของ $a + b + c - d$



ก. 132

ข. 144

ค. 156

ง. 168

15. จงหาคำตอบของสมการ $x = 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}}$

ก. $\frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$

ข. $2 \pm \sqrt{5}$

ค. $2 + \sqrt{5}$

ง. $2 - \sqrt{5}$

16. จงหาค่าของ $n\sqrt{\frac{150}{5^{2n+3} + 5^{2n+2}}}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

ก. $\frac{1}{5}$

ข. $\frac{2}{5}$

ค. $\frac{1}{25}$

ง. $\frac{1}{125}$

17. จงเรียงลำดับค่าของ $(9!)^7$, $(8!)^8$ และ $(7!)^9$ จากมากไปหาน้อย

ก. $(9!)^7$, $(8!)^8$, $(7!)^9$

ข. $(9!)^7$, $(7!)^9$, $(8!)^8$

ค. $(8!)^8$, $(9!)^7$, $(7!)^9$

ง. $(8!)^8$, $(7!)^9$, $(9!)^7$

18. มีคน 7 คนจับมือกันดังกรณีต่อไปนี้ จงหาว่ามีกรณีที่เป็นไปไม่ได้กี่กรณี

- (1) 4 คนที่จับกับคนอื่นทั้งหมด 4 คน และ
3 คนที่จับกับคนอื่นทั้งหมด 3 คน
- (2) 7 คนที่จับกับคนอื่นทั้งหมด 6 คน
- (3) 5 คนที่จับกับคนอื่นทั้งหมด 2 คน และ
2 คนที่จับกับคนอื่นทั้งหมด 5 คน
- (4) 3 คนที่จับกับคนอื่นทั้งหมด 5 คน และ
4 คนที่จับกับคนอื่นทั้งหมด 3 คน

ก. 0 กรณี ข. 1 กรณี ค. 2 กรณี ง. 3 กรณี

19. ให้ $x = \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{2}{3 \times 4 \times 5} + \frac{3}{4 \times 5 \times 6} + \dots + \frac{2005}{2006 \times 2007 \times 2008}$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $0 < x < \frac{1}{4}$ ข. $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ ค. $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ ง. $\frac{3}{4} < x < 1$

20. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $(a+b)^2 + (2a - \frac{1}{3})^2 + (a - \frac{2}{3})^2 + (b+1)^2 = \frac{4}{9}$ จงหาค่าของ $(b+a)^2 + (2b - \frac{1}{3})^2 + (b - \frac{2}{3})^2 + (a+1)^2$

ก. $\frac{4}{9}$ ข. $\frac{13}{9}$ ค. $\frac{29}{9}$ ง. $\frac{58}{9}$

21. สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีด้านทั้งสามยาว $a+1$, $a+6$ และ $a+7$ หน่วย ให้ d และ e เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - (a^2 - 1)x + (a - 1) = 0$ จงหาค่าของ $\frac{1}{d} + \frac{1}{e}$

ก. $\sqrt{3}$ ข. $2\sqrt{3} + 1$ ค. $\sqrt{2}$ ง. $3\sqrt{2} + 1$

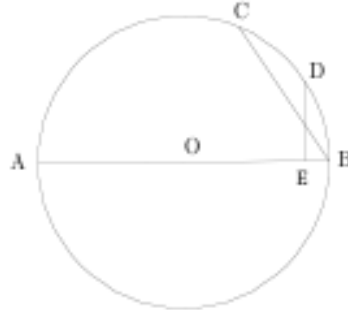
22. ให้ $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ จงหาค่าของ $(2x)^n + (2y)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

ก. -1 ข. 0 ค. 1 ง. 2

23. กำหนดให้ $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ จงหาค่าของ $\cot 75^\circ$

ก. $2 - \sqrt{3}$ ข. $2 + \sqrt{3}$ ค. $\sqrt{2} - 3$ ง. $\sqrt{2} + 3$

24. กำหนดวงกลมจุดศูนย์กลาง O มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง CB เป็นคอร์ดหนึ่ง, จุด D เป็นจุดศูนย์กลางส่วนโค้ง CB , จุด E อยู่บน AB ที่ทำให้ $DE \perp AB$ ถ้า $CB = 10$ หน่วย จงหาว่า DE ยาวกี่หน่วย



- ก. 6 หน่วย ข. 7 หน่วย ค. 5 หน่วย ง. 4 หน่วย

25. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง อาจารย์เขียนสมการบนกระดานดังนี้

$$(a - 1) \left[\left(2b^2 + \frac{1}{4} \right)^2 + 4 \left(2c^2 + \frac{3}{4} \right)^2 + 4bc(4b - 1) \right] + a(b^2 + 1) + b(2a - b - 2) = \frac{21}{16}a - \frac{5}{16}$$

แล้วอาจารย์บอกว่า “ a ไม่เป็นจำนวนเต็ม” แล้วถามนักเรียนว่า b และ c เป็นจำนวนอะไร คำตอบของนักเรียนมีดังนี้

- เห็นมะ : b และ c เป็นจำนวนเต็ม
 มิโคโตะ : b เป็นจำนวนเต็ม แต่ c ไม่เป็นจำนวนเต็ม
 เอริ : b ไม่เป็นจำนวนเต็ม แต่ c เป็นจำนวนเต็ม
 อากิระ : b และ c ไม่เป็นจำนวนเต็ม

นักเรียนคนใดตอบถูก

- ก. เห็นมะ ข. มิโคโตะ ค. เอริ ง. อากิระ