

หนังสือ EXIMIUS: เขียนคณิตพิชิตโจทย์
แบบทดสอบชุดที่ 4

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 17 พฤษภาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
ทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>

1. จงหาค่าของ $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2550}$
 ก. $\frac{5099}{2550}$ ข. $\frac{5101}{2550}$ ค. $\frac{5100}{2551}$ ง. $\frac{5101}{2551}$
2. สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก มีด้าน AB ยาว 1 หน่วย และด้าน BC ยาว 5 หน่วย และ สามเหลี่ยมมุมฉาก DEF มีมุม E เป็นมุมฉาก มีด้าน DE ยาว 2 หน่วย และด้าน EF ยาว 3 หน่วย จงหาขนาดของ $\hat{C} + \hat{F}$
 ก. 45° ข. 50° ค. 60° ง. 75°
3. กำหนดให้ $3^2 + 7^2 + 11^2 + \dots + 2009^2 = k$ และ $3 + 7 + 11 + \dots + 2009 = d$ จงหาค่าของ $1 \times 3 + 5 \times 7 + \dots + 2007 \times 2009$
 ก. $2k - 4d$ ข. $k - 2d$ ค. $3k - 2d$ ง. $6k - 3d$
4. เจ้าหญิงแห่งอาณาจักร Eximius ถูกลักพาตัวไปด้วยปีศาจร้ายนามสรวิศ กองกำลังอัศวินขี่ม้าขาวกิตติธัชได้รับคำสั่งจากพระราชินีให้ไปกำจัดเสีย โดยที่หัวหน้าทีมกิตติธัชต้องจัดกองกำลังไพร่พลจำนวนหนึ่ง โดยถ้าจัดรูปแบบแถวเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะมีพลทหารเหลือ 1 นาย แต่ถ้าจัดให้มีจำนวนพลทหารในแถวมากกว่าจำนวนพลทหารในหลักที่อยู่ 9 นาย พลทหารจะครบพอดี จงหาผลบวกของจำนวนของทหารที่เป็นไปได้ทั้งหมด
 ก. 452 นาย ข. 379 นาย ค. 567 นาย ง. 195 นาย
5. กำหนด a, b, c เป็นจำนวนเต็มและ $b > c$ โดยค่า a, b, c เป็นคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ a + b^2 + c^2 &= 17 \\ a^2 + b^3 + c^3 &= 21 \end{aligned}$$

จงหาค่าของ b

- ก. -1 ข. 0 ค. 1 ง. 2

9. มีกล่อง 32 ใบ ซึ่งมีน้ำหนักแตกต่างกันทั้งหมด จะสามารถนำกล่องเหล่านี้มาวางเรียงเป็นกำแพงที่มีความยาวเท่ากับกล่อง 8 ใบ และมีความสูง 4 ชั้นได้กี่วิธี โดยมีเงื่อนไขว่า ห้ามนำกล่องที่หนักกว่าวางซ้อนลงบนกล่องที่เบากว่า

ก. $\frac{32}{(4!)^8}$ วิธี ข. $\frac{32!}{(8!)^4}$ วิธี ค. $\frac{32!}{(4!)^8 \times 8!}$ วิธี ง. $\frac{32!}{(8!)^4 \times 4!}$ วิธี

10. กำหนดให้ $P(x) = 6x^3 - 131x^2 + 528x - 595$ โดยมี k_1, k_2 และ k_3 เป็นรากของพหุนามนี้ จงหาค่าของ $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$

ก. $430 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ ข. $431 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ ค. $432 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ ง. $433 \left(\frac{5}{6}\right)^2$

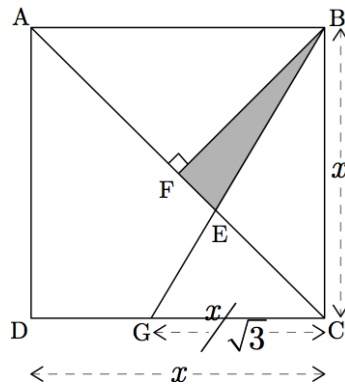
11. กำหนด a และ b เป็นค่าคงที่ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} ax + by &= 6 \\ ax^2 + by^2 &= 12 \\ ax^3 + by^3 &= 30 \\ ax^4 + by^4 &= 84 \end{aligned}$$

จงหาค่าของ $x^5 + y^5$

ก. 33 ข. 244 ค. 275 ง. 3125

12. จากรูป $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความยาวด้านด้านละ x หน่วย และ $GC = \frac{x}{\sqrt{3}}$ หน่วย จงหาพื้นที่ส่วนที่แรเงา



ก. $\frac{(2-\sqrt{3})x^2}{4}$ ตารางหน่วย ข. $\frac{(2+\sqrt{3})x^2}{4}$ ตารางหน่วย
 ค. $\frac{(2+\sqrt{3})x^2}{6}$ ตารางหน่วย ง. $\frac{(2-\sqrt{3})x^2}{6}$ ตารางหน่วย

13. กำหนดให้ $x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$, $y = \sqrt[3]{15 \sqrt[3]{15 \sqrt[3]{15 \dots}}}$ และ $\sqrt{15} \approx 3.87$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกต้อง

- (i) $x < y$
- (ii) $x \approx 1.44$
- (iii) $y \approx 1.29$

ก. ข้อ (i) ข. ข้อ (ii) ค. ข้อ (i), (ii) ง. ข้อ (ii), (iii)

14. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านยาว x , y และ z โดยที่ $x^2 + y^2 = z^2$ สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม แล้วสร้างรูปหกเหลี่ยมโดยการลากเส้นเชื่อมจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมที่ไม่ใช่จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม จงหาพื้นที่หกเหลี่ยม

- ก. $x^2 + y^2 + z^2 + xy$
- ข. $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{2}xy$
- ค. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$
- ง. $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{5}{2}xy$

15. คาซิมิและซาโยะเล่นเกมกันโดยแต่ละคนมีหมาก 1 ตัววางอยู่ที่ช่องล่างซ้ายของกระดานขนาด 2×2 ทั้งคู่ผลัดกันทอดเหรียญ ถ้าออกหัวจะเดินหมากของตนเองไปทางด้านบน 1 ช่อง ถ้าออกก้อยจะเดินหมากของตนเองไปทางด้านขวา 1 ช่อง ในกรณีที่ไม่สามารถเดินหมากได้เพราะวางอยู่สุดกระดานแล้ว ก็จะถือว่าผ่านตานั้นไป ใครที่เดินหมากไปถึงเส้นชัยคือช่องบนขวาก่อนจะเป็นฝ่ายชนะ ถ้าคาซิมิเป็นฝ่ายเริ่มเล่นก่อน จงหาความน่าจะเป็นที่คาซิมิจะชนะในเกมนี้

- ก. $\frac{1}{2}$
- ข. $\frac{5}{8}$
- ค. $\frac{2}{3}$
- ง. $\frac{3}{4}$

16. กำหนดให้ $(x - 4)^2 - 1111 = 0$ จงหาค่าของ $x^2(x - 8)^2 + 32(x^2 - 8x) + 252$

- ก. 1234317
- ข. 1234321
- ค. 1234330
- ง. 1234543

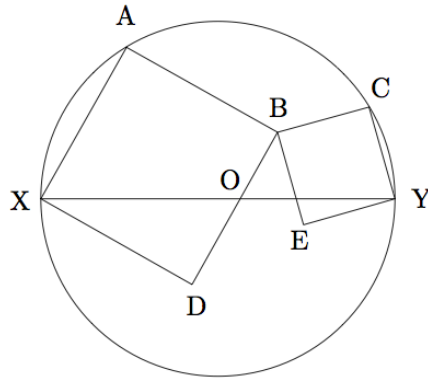
23. ให้เลขหกหลักสุดท้ายในฐานสิบแปดของ 17006111^2 เป็น $abcdef$
 ให้เลขหกหลักสุดท้ายในฐานสิบสี่ของ 4000065^2 เป็น $ghijkl$
 จงหาค่าของ $a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l$ ในฐานสิบ

ก. 2 ข. 13 ค. 14 ง. 21

24. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ จงหาค่าของ $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$

ก. 1 ข. 0 ค. $\frac{1}{2}$ ง. ไม่สามารถหาค่าได้

25. สี่เหลี่ยมจัตุรัส $XABD$ มีความยาวด้านละ 1 หน่วย อยู่ในวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง XY ยาว 2 หน่วย สี่เหลี่ยมจัตุรัส $YCBE$ อีกรูปหนึ่งถูกสร้างขึ้น โดยจุด A และ C อยู่บนเส้นรอบวง จงหาอัตราส่วนของพื้นที่สี่เหลี่ยม $XABD$ ต่อ $YCBE$



ก. 2 : 1 ข. $(2 - \sqrt{3}) : 2$ ค. $(\sqrt{3} + 1) : 2$ ง. $1 : (2 - \sqrt{3})$