

หนังสือ EXIMIUS: เขียนคณิตพิชิตโจทย์
แบบทดสอบชุดที่ 7

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 17 พฤษภาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
ทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>

1. ซ็อกโกแลตที่เก็บไว้ในตู้เย็นในห้องพักอาจารย์หายไป อาจารย์จึงเรียกนักเรียนมาสอบสวนเพื่อหาตัวคนขโมย พบผู้ต้องสงสัยเป็นนักเรียนหญิง 6 คน คือ A, K, S, N, Y และ H อาจารย์ น. จึงถามว่า “ใครเป็นคนขโมย”

คำตอบของนักเรียนแต่ละคนมีดังนี้

A: N และ H ไม่ได้ขโมย

K: A ไม่ได้ขโมย

S: K ไม่ได้ขโมย

N: Y ไม่ได้ขโมย

Y: K และ N เป็นคนขโมย

H: S ไม่ได้ขโมย

พอได้ฟังคำตอบ อาจารย์ น. ก็รู้สึกงงเป็นอย่างมาก เพราะไม่ทราบว่าจะใครพูดความจริงและใครโกหก อาจารย์ ท. ก็เลยถามไปอีกคำถามว่า “เมื่อไหร่ที่ใครโกหกอาจารย์ น.”

A: K โกหกอาจารย์ น.

K: H ไม่ได้โกหกอาจารย์ น.

S: A ไม่ได้โกหกอาจารย์ น.

N: หนูไม่ได้โกหกอาจารย์ น. นะคะ

Y: H โกหกอาจารย์ น.

H: S โกหกอาจารย์ น.

อาจารย์ ท. ก็ยิ่งงงเข้าไปอีก เพราะก็ยังไม่ทราบอยู่ดีว่าในคำถามนี้มีใครโกหกบ้าง แต่ข้อมูลที่ทราบทั้งหมดมีเพียงเท่านี้

- คนขโมยอาจจะแค่คนเดียวหรือร่วมกันขโมยมากกว่า 1 คนก็ได้
- แต่ละคนสามารถพูดความจริงหรือโกหกได้โดยอิสระ (ไม่จำเป็นว่าขโมยจะต้องโกหกหรือคนอื่นต้องพูดความจริง)
- คนที่โกหกอาจารย์ น. จะไม่โกหกอาจารย์ ท.

จงหาว่า คนที่ขโมยซ็อกโกแลตทั้งหมดมีใครบ้าง

2. จงยกตัวอย่างชุดของจำนวนเต็มบวก 2551 จำนวน (อาจซ้ำกันได้) ซึ่งผลบวกของทุกจำนวนมีค่าเท่ากับผลคูณของทุกจำนวน มา 12 ชุด
3. หลังจากการสอบปลายภาคที่มีคะแนนเต็ม 100 คะแนน ปรากฏว่านักเรียนห้อง Gifted Math จำนวน 10 คน ได้คะแนนเป็นจำนวนเต็ม และไม่มีใครได้คะแนนต่ำกว่า 60 คะแนน แต่อาจารย์ทำคะแนนของนักเรียนหายไป 3 คน โดยนักเรียน 7 คนที่เหลือได้คะแนนดังนี้ 68, 76, 78, 81, 87, 87, 92 ถ้าทราบว่าคะแนนนักเรียนทั้ง 10 คนมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับมัธยฐาน จงหาคะแนนของนักเรียนทั้งหมด

4. เขียนจำนวนเต็มบวก 16 จำนวนที่แตกต่างกันลงในตารางขนาด 4×4 โดยให้ผลคูณของจำนวนในทุกแถว ทุกหลัก และทุกแนวทแยงมุมมีค่าเท่ากัน ให้ m เป็นจำนวนที่มีค่ามากที่สุดที่สุดในตาราง จงหาค่า m ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้

5. จงหาค่าของ $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{\binom{k}{4}}$ เมื่อ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

6. มีจำนวนเต็มบวก (a, b, c, d) ทั้งหมดที่ชุดที่ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ เป็นจำนวนเต็ม

7. วางหมากจำนวนหนึ่งลงบนกระดานขนาด 21×21 โดยหมากที่มีหมากตัวอื่นวางอยู่ในแนวเดียวกันทั้งสี่ทิศทางคือ บน ล่าง ซ้าย ขวา จะเรียกว่า “หมากที่ถูกปิด” จงหาว่าสามารถวางหมากลงบนกระดาน 21×21 ได้มากที่สุดกี่ตัว โดยที่ไม่มี “หมากที่ถูกปิด”

8. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงใดๆ จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ

$$\frac{x^2}{(3x - 2y - z)^2} + \frac{y^2}{(3y - 2z - x)^2} + \frac{z^2}{(3z - 2x - y)^2}$$

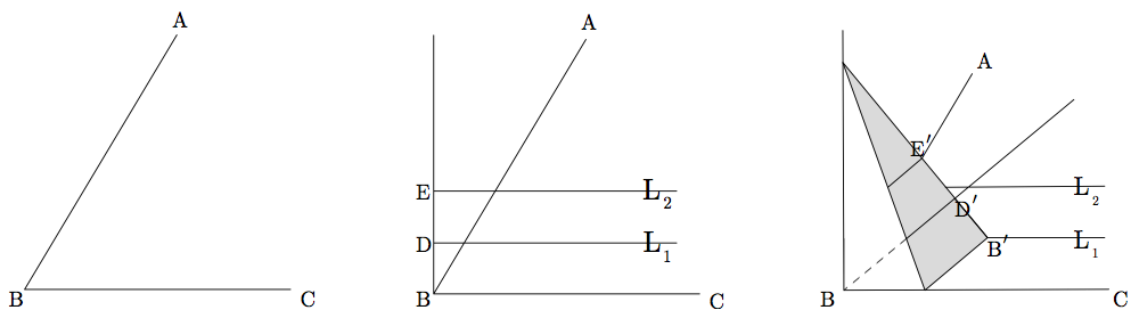
9. พิจารณาการสร้างต่อไปนี้

กำหนด มุมแหลม ABC , สร้างเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ BC กำหนด D และ E บนเส้นตรงนี้ โดยให้ $BD = DE$

ลากเส้นตรงที่ผ่าน D และ E โดยให้ขนานกับ BC คือ L_1 และ L_2 ตามลำดับ

พับกระดาษนี้ โดยให้ E มาทับ AB ที่ E' และ B มาทับเส้นตรงที่ขนานกับ BC ที่ผ่าน D ที่ B'

จงแสดงว่า BB' และ BD' แบ่งมุม ABC ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน



10. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{ab + bc + cd}$$

11. ให้ a, b, c, d, e, f, g เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2}{ab + bc + cd + de + ef + fg}$$

12. นิยาม: ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูล $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ หมายถึง $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - d)^2}$ เมื่อ d เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

การสอบมีคะแนนเต็ม 100 คะแนน โนโตกะ ยูเอะ และฮารุนะได้คะแนนสอบเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งใน 3 คนนี้ โนโตกะได้คะแนนมากที่สุด และยูเอะได้คะแนนน้อยที่สุด โดยที่ไม่มีใครได้ต่ำกว่า 50 คะแนน และฮารุนะได้คะแนนมากกว่ายูเอะไม่เกิน 15 คะแนน

ให้ m เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนของทั้งสามคน

ให้ M เป็นมัธยฐานของคะแนนของทั้งสามคน

ให้ σ เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของทั้งสามคน

ถ้า σ^2, m, M มีค่าเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมมากกว่า 0

จงหาคะแนนของ (โนโตกะ, ยูเอะ, ฮารุนะ) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

13. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบใดๆ จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ

$$\frac{a}{716a + b + c + d} + \frac{b}{716b + c + d + a} + \frac{c}{716c + d + a + b} + \frac{d}{716d + a + b + c}$$