

ข้อสอบ TUGMOs ครั้งที่ 1 รอบที่ 2
สอบวันที่ 6 กุมภาพันธ์ 2547

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 19 มกราคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
ทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญา Creative Commons Attribution-Noncommercial-
Share Alike 3.0

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>



ข้อสอบแข่งขันในโครงการสรรหานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ประจำปีการศึกษา 2546
วิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น รอบที่ 2
สอบวันศุกร์ที่ 6 กุมภาพันธ์ 2547 เวลา 13.00-14.00 น.

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้มี 20 ข้อ ข้อละ 62 คะแนน
ตอบผิดหักครั้งละ 5 คะแนน
2. ใช้เวลาสอบ 1 ชั่วโมง (13.00 - 14.00 น.)
3. กรอกข้อมูลลงในกระดาษคำตอบให้ครบถ้วนและชัดเจน
และ จัดคำตอบให้อยู่ในรูปอย่างง่าย
4. หากมีข้อสงสัยให้ยกมือขึ้นเหนือศีรษะเพื่อสอบถามจากกรรมการคุมสอบ
5. คำตัดสินของคณะกรรมการจัดสอบถือเป็นข้อยุติ
6. ไม่อนุญาตให้เปิดข้อสอบก่อนได้รับอนุญาต
7. อนุญาตให้สามารถปรึกษาภายในทีมเดียวกันได้
8. ห้ามปรึกษาเสียงดังรบกวนผู้อื่น
9. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณ
10. ห้ามทุจริตในการสอบ
11. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณ

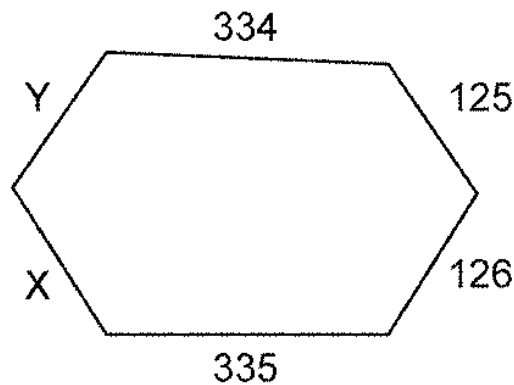
1. กำหนดให้

$$\frac{\sqrt{xy - yz - zx} + \sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3x^2yz + 3xy^2z + 2xyz^2}}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz^2 - x^2yz - xy^2z} + \sqrt{(y+x)z - xy}} = \tan \theta$$

และ $\frac{11xy^2z^3 + 7x^2y^3z + 3x^3yz^2}{179xy + 37x^2y + 31xz} = 9$

จงหาค่าของ $\sec^2 \theta - 1$

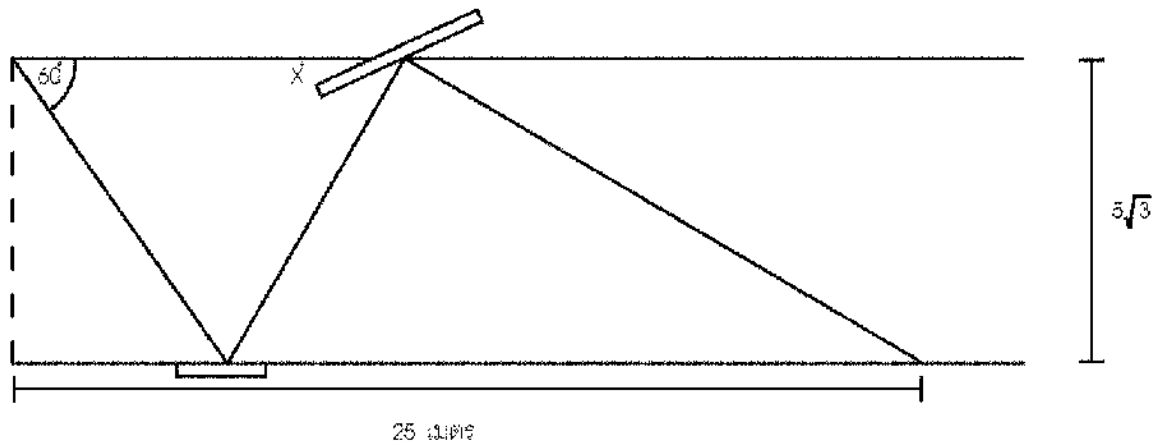
2. ให้ ABCDEF เป็นรูป หกเหลี่ยมมุมเท่า มีความยาวด้านดังรูป



จงหาค่าของ $x - y$

3. ลูกเต๋ามิเที่ยงลูกหนึ่ง มีโอกาสออกเลข n เป็น n เท่าของเลข 1 , $n=1,2,3,4,5,6$ เมื่อโยนลูกเต๋านี้พร้อมกับลูกเต๋ามิเที่ยงตรง จงหาโอกาสที่จะหงายหน้าที่ผลรวมแต้มของลูกเต๋าททั้งสองลูกหารด้วย 4 ลงตัว

4. จากรูป



จงหาขนาดของมุม x เมื่อ $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ (มุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน)

5. กำหนดลำดับ $7, 9, 19, 39, 71, 117, 179, \dots$ จงหาพจน์ที่ 13 ของลำดับ

6. จงหาค่าของ $\sqrt{x^3 + y^3} \sqrt{x^3 + y^3} \sqrt{x^3 + y^3} \sqrt{x^3 + y^3} \dots$ เมื่อ $x, y \geq 0$

7. ถ้าวันนี้ (6 ก.พ. 47) ได้ปรับเวลาให้ตรง ณ เวลา 12.00 น. นาฬิกาเดินเข้าไปวันละ 12 นาที ถ้าปีหน้า (6 ก.พ. 48) คุณมาที่นี่อีกครั้ง เมื่อเวลาจริง 8.00 น. เข็มนาฬิกาจะทำมุมกันเท่าไร สมมติว่านาฬิกาเดินตลอดและไม่ปรับเวลาใหม่ (ตอบเป็นมุมที่ทางน้อยกว่า 180 องศา)

8. สนามหญ้าแห่งหนึ่งมีหญ้าออกสม่ำเสมอ ถ้าใช้วัว 60 ตัวจะกินหญ้าหมดในเวลา 60 วัน หรือ วัว 80 ตัวกินหญ้าหมดในเวลา 40 วัน ถ้าให้วัวกินหญ้า 4 วันแล้วหยุด 1 วันทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆจนครบ 34 วันพบว่าหญ้าหมดพอดี ถ้ามว่า มีวัวกี่ตัว

9. จงหาจำนวนของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มีผลบวกความยาวด้านคือ 113 นิ้ว และความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม

10. มีลูกกอล์ฟอยู่ 3 กล่อง A,B,C

นำลูกกอล์ฟ 17 ชิ้นจากกล่อง A ไปใส่กล่อง B

นำลูกกอล์ฟ 9 ชิ้นจากกล่อง B ไปใส่กล่อง C

นำลูกกอล์ฟ 6 ชิ้นจากกล่อง C ไปใส่กล่อง A

ในที่สุดทั้งสามกล่องมีลูกกอล์ฟเท่ากัน

ถ้ามว่า เดิมกล่อง A มีลูกกอล์ฟกี่ชิ้น ถ้ามีลูกกอล์ฟน้อยที่สุด

11. จงหาผลคูณ $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} \times \dots \times \frac{9999}{10000}$

12. เส้นส่วนสูง $\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{CR}$ ถูกวาดใน $\triangle ABC$ และตัดกันที่จุด H (เส้นส่วนสูงของสามเหลี่ยมตัดกันที่จุดเดียว)

กำหนดให้ $AH = BC = x, RP = y$ และ $PQ = z$

จงหารัศมีวงกลมล้อมรอบ $\triangle RPQ$ (ตอบในเทอมของ x, y, z)

13. จงแก้ระบบสมการ

ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวกหรือ 0

$$a^2 + b^2 = 5$$

$$c^2 + d^2 = 5$$

$$ac + bd = 5$$

$$ac - bd = 3$$

14. มีลูกเหล็ก 5 ลูก เมื่อชั่งชั้นที่ 1 กับชั้นที่ 2 จะมีน้ำหนัก 12 กิโลกรัม, ชั้นที่ 2 กับชั้นที่ 3 จะมีน้ำหนัก 13.5 กิโลกรัม, ชั้นที่ 3 กับชั้นที่ 4 จะมีน้ำหนัก 11.5 กิโลกรัม, ชั้นที่ 4 กับชั้นที่ 5 จะมีน้ำหนัก 8 กิโลกรัม, ชั้นที่ 1 กับชั้นที่ 3 กับชั้นที่ 5 จะมีน้ำหนัก 16 กิโลกรัม จงหาว่าแต่ละชั้นหนักกี่กรัม

15. เอกเป็นประธานชมรมคณิตศาสตร์ เขาอยู่ปี 4 และมีกรรมการอีก 3 คนอยู่ปี 1, ปี 2 และ ปี 3 ทั้งสี่นี้ประชุมรอบโต๊ะกลม โดยเอกนั่งทางซ้ายของแพรว โจนั่งอยู่ทางขวาของนักศึกษาปี 3 แน่นซึ่งไม่ใช่นักศึกษาปี 2 นั่งตรงข้ามกับแพรว จงหาว่าใครเป็นนักศึกษาปีไหน และนั่งโต๊ะอย่างไร

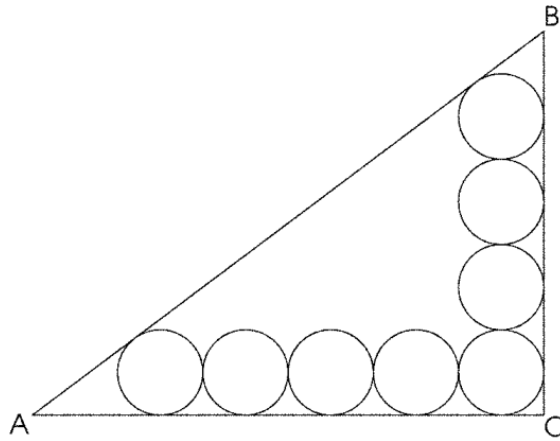
16. สมการ $x^2 - 14x + k = 0$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มบวก มีรากเป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันแทนด้วย p, q จงหาค่าของ $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ (ตอบเป็นค่าคงที่)

17. จงหาจำนวนเต็มบวก c ทั้งหมดที่ทำให้สมการ $(m^2 + 1)(n^2 + 1) = (cmn + 1)^2 + 1$ มีจำนวนคำตอบ (m, n) ที่เป็นจำนวนเต็มบวกเป็นอนันต์

18. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ และจุด P เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม ABC ซึ่งทำให้ $\angle PBC = \angle PCA < \angle PAB$ เส้นตรง PB ตัดวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC ที่ B และ E เส้นตรง CE ตัดวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม APE ที่ E และ F จงหา $[APEF]:[ABP]$ ($AB=c, BC=a, AC=b$) ตอบในเทอมของ a, b, c

19. เมือง TU ใช้เหรียญ 3 แบบ แต่ละเหรียญมีมูลค่าเป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งแตกต่างกัน ยอดมีเหรียญ TU 4 เหรียญคิดเป็นเงินไทย 28 บาท เพชรมีเหรียญ TU 5 เหรียญคิดเป็นเงินไทย 21 บาท แต่ละคนมีเหรียญ TU ทั้งสามแบบ เมื่อคิดเป็นเงินไทยแล้วเหรียญ TU ทั้ง 3 แบบมีมูลค่ารวมกันก็บาท

20. จากรูป



วงกลมเล็กทุกรูปมีรัศมี 1 หน่วย และมุม C เป็นมุมฉาก วงกลมแนบในสามเหลี่ยม ABC มีรัศมีเท่าไร