

ข้อสอบ TUGMOs ครั้งที่ 2 รอบที่ 1
สอบวันที่ 14 ธันวาคม 2547

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 21 มกราคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
ทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญา Creative Commons Attribution-Noncommercial-
Share Alike 3.0

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>

1. กำหนด x, y และ z เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6z \\ y^2 + z^2 = 6x \\ z^2 + x^2 = 6y \end{cases}$$

ถ้า $S = x + y + z$ จงหาผลรวมของ S ทุกชุดที่เป็นไปได้ทั้งหมด

- ก. 0 ข. 3 ค. 9 ง. -9 จ. ไม่มีข้อใดถูก
2. วงกลมรัศมี 7 หน่วย 4 วงตัดกันที่จุดหนึ่งดังรูป ซึ่งเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกันตั้งฉากกันที่จุดตัดของวงกลมทั้งสอง จงหาพื้นที่บริเวณที่แรเงา



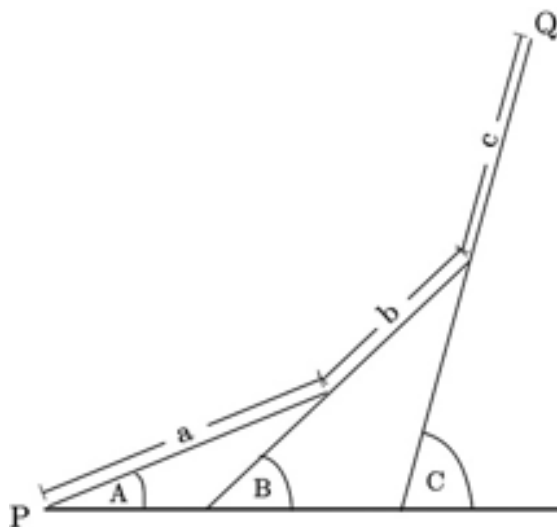
- ก. 84 ตารางหน่วย ข. 112 ตารางหน่วย ค. 154 ตารางหน่วย
ง. 196 ตารางหน่วย จ. 392 ตารางหน่วย
3. จงหาจำนวนคำตอบ (x, y, z) ที่สอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนจริง

- ก. 0 ข. 2 ค. 4 ง. 6 จ. มีจำนวนคำตอบมากมาย

4. จงหา PQ^2



- ก. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab(\cos A \cos B + \sin A \sin B) + 2bc(\cos B \cos C + \sin B \sin C) + 2ac(\cos A \cos C + \sin A \sin C)$
 ข. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab(\cos A \cos B - \sin A \sin B) + 2bc(\cos B \cos C - \sin B \sin C) + 2ac(\cos A \cos C - \sin A \sin C)$
 ค. $\frac{a^2}{\sin^2 A} + \frac{b^2}{\sin^2 B} + \frac{c^2}{\sin^2 C} - 2ab \cos C - 2bc \cos A - 2ac \cos B$
 ง. $\frac{a^2}{\sin^2 B} + \frac{b^2}{\sin^2 C} + \frac{c^2}{\sin^2 A} - 2ab \cos C - 2bc \cos A - 2ac \cos B$
 จ. ไม่มีข้อใดถูก

5. กำหนด x, y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 < x < y$ และ $x^2 + y^2 = 5xy$ จงหาค่าของ $\frac{(x+y)^3}{x^3-y^3}$

- ก. $\frac{7\sqrt{21}}{6}$ ข. $-\frac{7\sqrt{21}}{6}$ ค. $\frac{7\sqrt{21}}{18}$ ง. $-\frac{7\sqrt{21}}{18}$ จ. ไม่มีข้อใดถูก

6. กำหนด $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ เมื่อ a_i เป็นสัมประสิทธิ์ของ x_i ถ้า $P(x) = (1+x)^{335}$

จงหาค่าของ $\sqrt[2004]{a_{168} + a_{169} + a_{170} + \dots + a_{335}}$

- ก. $\sqrt{2}$ ข. $\sqrt[3]{2}$ ค. $\sqrt[4]{2}$ ง. $\sqrt[6]{2}$ จ. ไม่มีข้อใดถูก

7. จงหารูปอย่างง่ายของ $\left(\frac{a^3-3a^2-3a+1}{b^3-3b^2-3b+1} + \frac{b^3-3b^2-3b+1}{a^3-3a^2-3a+1} \right)^4$ เมื่อ $ab = 1$ และ $a \neq 1$

- ก. 16
 ข. $a^4 + 4a^2 + 4b^2 + b^4 + 6$
 ค. $a^{12} + 4a^6 + 4b^6 + b^{12} + 6$
 ง. $a^{16} + 4a^8 + 4b^8 + a^{16} + 6$
 จ. ไม่มีข้อใดถูก

8. ถ้ากราฟ $y = x^2 + c$ ตัดกับกราฟ $x^2 + y^2 = 4$ ทั้งหมด 4 จุด เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ข้อใดถูกต้องที่สุด

ก. $c > 2$

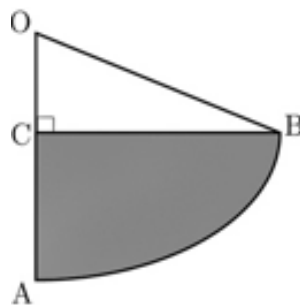
ข. $-4 < c < -2$

ค. $(-\sqrt{2}, 2)$ อาจเป็นหนึ่งในสี่จุดที่กราฟตัดกันได้

ง. ถูกทั้งข้อ 1 และ 2

จ. ไม่มีข้อใดถูก

9. AOB เป็นเซกเตอร์ของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง ถ้า $AO = 10$ หน่วยและ $BC = 5$ หน่วย จงหาพื้นที่บริเวณที่แรเงา



ก. $\frac{50\pi - 75\sqrt{3}}{6}$

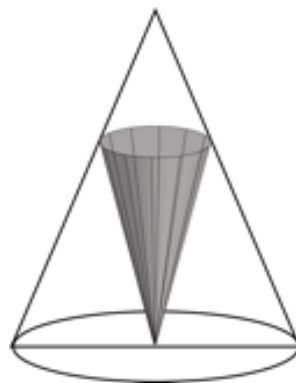
ข. $\frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{6}$

ค. $\frac{100\pi - 25\sqrt{3}}{6}$

ง. $\frac{50\pi - 75\sqrt{3}}{3}$

จ. $\frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{3}$

10. A เป็นภาชนะที่ใส่น้ำทรงกรวยมีฝาปิดที่มีน้ำอยู่ เป็นปริมาตร α เท่าของปริมาตรกรวย A หลังจากใส่น้ำทรงกรวยตัน B ลงไปในกรวย A ปิดฝากรวยแล้วตั้ง พบว่ากรวย B วางตัวตั้งรูป ถ้ามองจากด้านข้างภาชนะจะพบว่าหน้าตัดวงกลมของกรวย B อยู่พอดีกับระดับน้ำ จงหาอัตราส่วนของรัศมีกรวย A ต่อรัศมีกรวย B



ก. $1 : \sqrt{\alpha}$

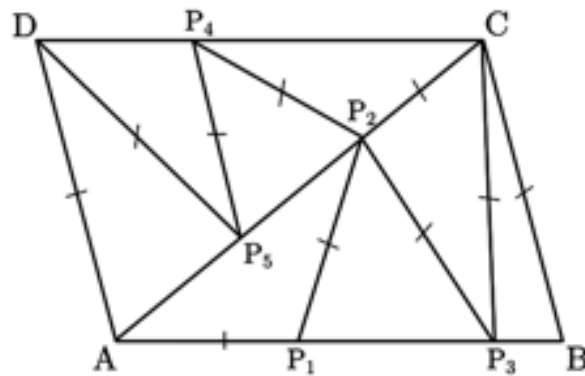
ข. $1 : \sqrt{1 - \alpha}$

ค. $1 : \sqrt[3]{\alpha}$

ง. $1 : \sqrt[3]{1 - \alpha}$

จ. $1 : \sqrt{1 - \alpha^2}$

11. กำหนด ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = CP_3 = BC = CP_2 = P_2P_4 = P_4P_5 = P_5D = AD = 4$ หน่วย



พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (a) $\triangle ADP_5 \sim \triangle BCP_3$
 (b) $\triangle P_5P_4P_2 \sim \triangle CP_2P_3$
 (c) พื้นที่ $\triangle P_5P_4C =$ พื้นที่ $\triangle AP_2P_3$
 (d) พื้นที่ $\triangle P_4P_5D =$ พื้นที่ $4\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

มีข้อความที่กล่าวได้ถูกต้องทั้งหมดกี่ข้อ

- ก. 0 ข้อ ข. 1 ข้อ ค. 2 ข้อ ง. 3 ข้อ จ. 4 ข้อ
12. ให้ลำดับ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ มีสมบัติว่า $A_n + A_{n+1} = A_{n+2}$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ และ $A_2 = 3, A_{50} = 300$
 จงหาค่าของ $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{48}$
 ก. 100 ข. 297 ค. 303 ง. 900 จ. ไม่มีข้อใดถูก
13. จงหาค่าของ $k^2 + \frac{60}{k+2}$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $||x - 2| - 3| + k| = 4$ มีคำตอบ 5 คำตอบ
 ก. 21 ข. 37 ค. $55\frac{2}{3}$ ง. 61 จ. ไม่มีข้อใดถูก
14. กำหนด $|a|$ และ b เป็นจำนวนเต็มบวกที่มี 4 หลัก โดยที่ $a + b = 2547$
 จงหาว่ามีจำนวนเต็ม a ที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่จำนวน
 ก. 548 ข. 2548 ค. 7001 ง. 8001 จ. 9001
15. ให้ $\overline{x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1 x_0}$ แทนจำนวนในเลขฐาน 10 ซึ่ง x_0 เป็นหลักหน่วย, x_1 เป็นหลักสิบ, \dots จงหาค่าของ $a^3 + b^2 + c$ เมื่อ a, b และ c สอดคล้องเงื่อนไข $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{abc}$ (และ $a \neq 0$)
 ก. 90 ข. 79 ค. 74 ง. 18 จ. ไม่มีคำตอบ

16. ในการสอบวิทยาศาสตร์ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีข้อสอบ 7 ข้อโดยที่เป็นแบบปรนัย 2 ตัวเลือกทุกข้อ ถ้าหากตอบถูกจะได้ข้อละ 5 คะแนน แต่หากตอบผิดจะถูกหัก 1 คะแนน หากนักเรียนทุกคนต้องตอบทุกข้อและจะผ่านเกณฑ์เมื่อได้คะแนนไม่ติดลบ จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะสอบผ่าน
- ก. $\frac{1}{16}$ ข. $\frac{7}{128}$ ค. $\frac{1}{2}$ ง. $\frac{121}{128}$ จ. $\frac{15}{16}$
17. ฟุ้งหญ้าแห่งหนึ่งมีหญ้าออกสม่ำเสมอตลอดเวลา โดยสามารถเลี้ยงวัวได้ 70 ตัวในเวลา 24 วัน เลี้ยงได้ 30 ตัวใน 60 วัน
- ถ้าต้องการเลี้ยงวัวได้นาน 96 วันพอดี จะต้องเลี้ยงวัวกี่ตัว
- ก. 12 ตัว ข. 15 ตัว ค. 24 ตัว ง. 25 ตัว จ. ไม่มีคำตอบ
18. กำหนดข้อมูลทางสถิติดังนี้ $a+3, 1, b-1, \frac{a^2+4}{4}, b^2+1$ โดยข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 0.75 มีมัธยฐานเท่ากับ c และฐานนิยมเท่ากับ d จงหาค่าของ $d^c \cdot c^b \cdot b^a \cdot a^d$
- ก. -8 ข. 8 ค. -4 ง. 4 จ. 2
19. ฝากเงิน 1,000,000 บาทในธนาคารที่คิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 1 ปีโดยที่ปีที่ 1 คิดดอกเบี้ย 1% และปีที่ k คิดดอกเบี้ย $k\%$ เมื่อครบ 3 ปีจะมีเงินในธนาคารเท่าไร
- ก. 1,020,106 บาท ข. 1,030,000 บาท ค. 1,030,301 บาท
ง. 1,060,006 บาท จ. 1,061,106 บาท
20. ลำดับ 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ... มีผลบวกของ 335 พจน์แรกเท่ากับเท่าใด
- ก. 5525 ข. 5785 ค. 6045 ง. 6201 จ. 6461
21. ให้ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงลบซึ่ง $a_i a_{n-i} = 1$ และ $a_i \neq -1$ สำหรับทุกๆ $i = 0, 1, \dots, n$
- และให้ $b_{(n,k)} = \frac{1}{1+a_0^k} + \frac{1}{1+a_1^k} + \dots + \frac{1}{1+a_n^k}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม จงหาค่าของ $b_{(2004,2547)}$
- ก. 2005 ข. 2004 ค. 1002.5 ง. 1002 จ. 1001.5
22. ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $\frac{13552k}{121_k}$ มีค่าใกล้เคียง 344 มากที่สุด จงหาว่ามีจำนวนที่เป็นตัวประกอบที่เป็นบวกของ k กี่จำนวน (121_k เป็นตัวเลขที่เขียนในฐาน k)
- ก. 2 ข. 3 ค. 4 ง. 5 จ. 6

23. เด็กชายคนหนึ่งต้องการเดินจากจุด A ไป B ตามเส้นทางที่กำหนดโดยสี่เหลี่ยมย่อยมีด้านยาวด้านละ 1 หน่วย เด็กชายคนนี้นับจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งก่อนเดินก้าวแรกและนับเพิ่มขึ้นทีละ 1 จากจำนวนเดิมก่อนจะเดินก้าวต่อไป ทำเช่นนั้นจนเดินถึงจุด B



ถ้ากำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

- (a) เด็กชายคนนี้รู้จักจำนวนเต็มตั้งแต่ -7 ถึง 77 เท่านั้น
 (b) ทุกครั้งที่นับได้จำนวนที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์เขาจะก้าวเปลี่ยนทิศทางเสมอ (ก้าวอื่นเดินอย่างไรก็ได้)
 (c) เขาเดินได้ก้าวละ 1 หน่วยและต้องการเดินให้ได้ระยะทางสั้นที่สุด

จงหาว่ามีกี่จำนวนที่เขาสามารถนับเป็นจำนวนแรกได้

- ก. 70 ข. 75 ค. 76 ง. 79 จ. 84

24. ให้ $x : y = 3 : 5$ และ $y : z = 2 : 4$ จงหาค่าของ $3\frac{5x}{y+z} + \frac{13y}{z+x} - \frac{4z}{x+y}$

- ก. $\frac{1}{3}$ ข. 1 ค. 3 ง. 311 จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

25. จงหาเศษเหลือจากการหาร $x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ ด้วย $2x - 3$

- ก. $\frac{87}{32}$ ข. $\frac{87}{16}$ ค. $\frac{87}{8}$ ง. 87 จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

26. ให้ a และ b เป็นรากของ $x^2 - 6x - 247$ และ c และ d เป็นรากของ $x^2 - (2a + b)x - 5b + 1$ โดยที่ $a > b, c > d$

จงหาค่าของ $|(a - c)^2 + (b - d)^2|$

- ก. 109 ข. 265 ค. 337 ง. 2481 จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

27. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{cases} x + y = 8 - xy \\ y + z = 15 - yz \\ z + x = 24 - zx \end{cases}$$

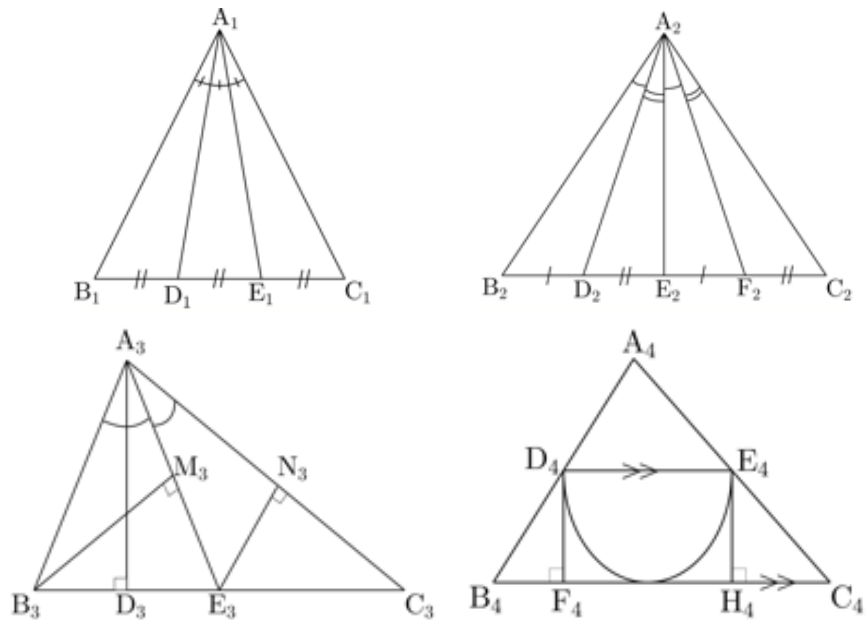
จงหา $8x + 5y + 9z$ ที่มากที่สุด

- ก. -124 ข. 72 ค. 35 ง. 80 จ. ไม่มีคำตอบ

28. เจียบได้รับรางวัลจากการแข่งขันส่วนกะหมี่กิ่งสำเร็จรูปไปชิงโชคเป็นทองคำน้ำหนัก 9 กิโลกรัม
 อย่างไรก็ดี เจียบไม่ยอมได้ทองคำ แต่ต้องการเป็นเงินสดแทน ซึ่งเธอเสนอว่าจะรับซื้อ
 ทองคำดังกล่าวจากเจียบในราคาบาทละ 7,800 บาท ถ้ามว่าเจียบจะได้รับเงินที่ต่ำลิ่ง
- ก. 1,170,000 ข. 1,404,000 ค. 2,340,000
 ง. 7,020,000 จ. ไม่มีข้อถูก

29. ในการเข้าแถวของนักศึกษาวิชาทหารโดยไม่เรียงตามระดับความสูงเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
 จงเปรียบเทียบความสูงของคนต่อไปนี้ เมื่อ
- a = ความสูงของคนที่สูงที่สุดในบรรดาคนที่เตี้ยที่สุดของแต่ละแถว
 b = ความสูงของคนที่ยี่ที่สุดในบรรดาคนที่สูงที่สุดของแต่ละหลัก
- ก. $a > b$ ข. $a < b$ ค. $a \geq b$ ง. $a \leq b$ จ. $a = b$

30. พิจารณารูปต่อไปนี้



โดยที่ $B_3\hat{M}_3N_3 = 135^\circ$ และ พื้นที่สามเหลี่ยม $A_4B_4C_4$ เป็นสองเท่าของพื้นที่สี่เหลี่ยม
 $D_4E_4H_4F_4$

มีกี่รูปที่สามารถเกิดได้จริงบนระนาบในโลกแห่งความเป็นจริงนี้

- ก. 0 รูป ข. 1 รูป ค. 2 รูป ง. 3 รูป จ. 4 รูป