

ข้อสอบ TUGMOs ครั้งที่ 2 รอบที่ 2
สอบวันที่ 14 ธันวาคม 2547

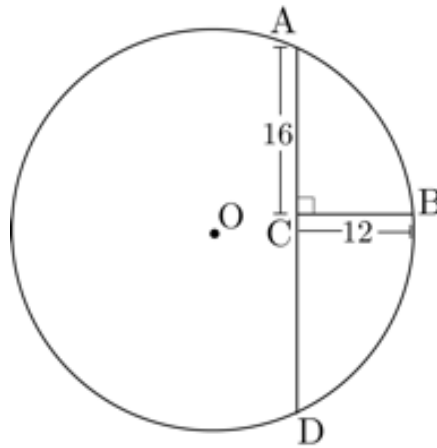
ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 21 มกราคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
ทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญา Creative Commons Attribution-Noncommercial-
Share Alike 3.0

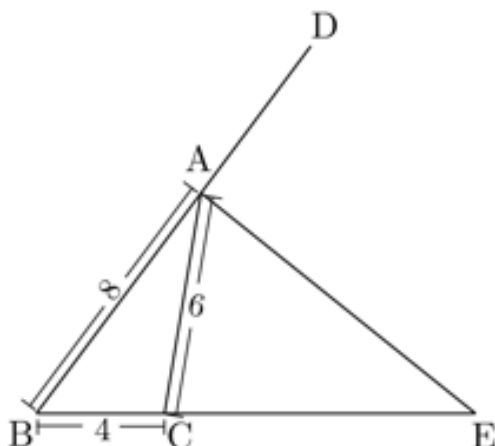
ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>

1. จงหาจำนวนของจำนวนเต็ม k ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้
 - (a) ผลบวกของ k กับ 28 เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์
 - (b) ผลบวกของ k กับ 2800 เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์
2. วงกลม O รัศมี 14.5 หน่วย จุด A, B, O เป็นจุดที่อยู่บนวงกลม กำหนดให้ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ที่จุด C และ $AC = 16$ หน่วย, $BC = 12$ หน่วย จงหา CD



3. “วันเกิดมหัศจรรย์” คือวันเกิดในปีที่เรามีอายุเท่ากับผลบวกของเลขโดดในปี ค.ศ. ที่เกิด เช่น คนที่เกิดปี 1899 จะมีวันเกิดมหัศจรรย์ในปี 1926 และ คนที่เกิดปี 1908 จะมีวันเกิดมหัศจรรย์ในปี 1926 เช่นเดียวกัน จงหาปีที่ถัดจาก 1926 (ปีแรก) ซึ่งมีคนที่เกิด ค.ศ. ต่างกัน แต่มีวันเกิดมหัศจรรย์ในปีเดียวกัน
4. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนเต็ม x ทั้งหมดที่ $\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2} + \frac{1}{4}$ สามารถเขียนได้ในรูป a^2 เมื่อ a เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ $-332 \leq x \leq 326$

5. จากรูป ถ้า $\angle CAE = \angle DAE$, $AB = 8$, $BC = 4$, $CA = 6$ จงหา CE



6. จงหาว่ามีกี่วิธีในการใส่เลข 1, 2, 3, 4 ลงในตารางขนาด 4×4 โดยที่ผลบวกในแต่ละแถวและแต่ละหลักหารด้วย 4 ลงตัว

ตัวอย่าง

2	1	2	3
3	1	3	1
2	1	2	3
1	1	1	1

หมายเหตุ ใส่เลขซ้ำได้ ไม่ใส่ก็ได้

7. จงหาจำนวนเต็มสามหลัก m ซึ่งมีสมบัติว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวน 6 จำนวน(แตกต่างกัน) ที่เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนตัวเลขให้หลักต่างๆ ของ m จะมีค่าเท่ากับ m

ตัวอย่าง ตัวเลขที่เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนของ 123 คือ 123, 132, 213, 231, 312, 321

8. จงหาจำนวนของจำนวนเต็ม n ซึ่งประกอบด้วยเลขโดด 9 ตัวเท่านั้นคือ 1, 2, ..., 9 โดยที่ตัวหารร่วมมากของ 90 กับ n ไม่เท่ากับ 18

9. ให้ $P(n)$ แทนจำนวนเฉพาะบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่หาร n ไม่ลงตัว เช่น $P(7) = 2$, $P(8) = 3$ และให้ $G(n)$ แทนผลคูณของจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า n ทั้งหมด โดยที่ $G(2) = 1$

นิยาม ลำดับ x_n เป็นลำดับซึ่งสอดคล้อง $x_n = \frac{x_{n-1}P(x_{n-1})}{G(P(x_{n-1}))}$ โดยที่ $x_0 = 1$

จงหา x_{2547}

10. จงหาจำนวนนับ 4 หลักที่มีค่าน้อยสุดที่สามารถเขียนในรูปของจำนวนเต็มบวก 18 ตัวเรียงกันบวกกัน หรือ 19 ตัวเรียงกันบวกกัน หรือ 20 ตัวเรียงกันบวกกัน

11. ในการแข่งขัน TUGMOs รอบที่ 1 ผลรวมคะแนนของยอดและเทมเท่ากับของอัฟและลิ้ม ถ้าคะแนนของยอดและลิ้มสลับกันแล้วคะแนนของอัฟและลิ้มจะมากกว่าผลรวมคะแนนของอีก 2 คนที่เหลือ นอกจากนี้คะแนนของเทมยังมากกว่าคะแนนของยอดและลิ้มรวมกัน จงเรียงลำดับคะแนนจากมากไปน้อย โดยสมมติว่าคะแนนเหล่านี้ไม่ติดลบ
12. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $x \geq y \geq z$ และสอดคล้องระบบสมการ

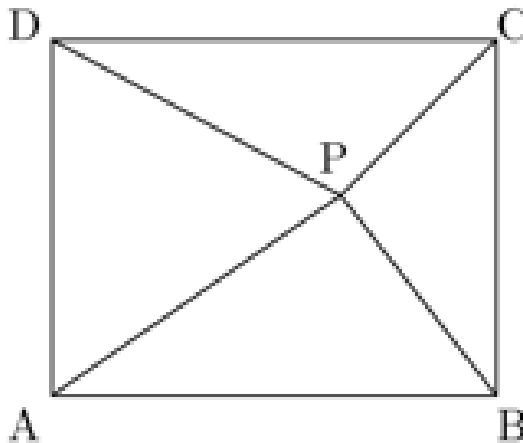
$$3x + 4y + 2z = 8$$

$$12xy + 8yz + 6zx = 19$$

$$xyz = \frac{1}{2}$$

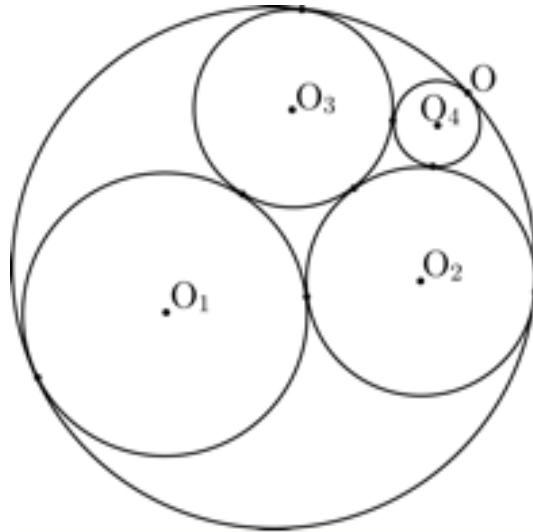
จงหา (x, y, z)

13. จากรูป $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม P เป็นจุดภายในซึ่งทำให้ $PA = 29$ หน่วย, $PB = 25$ หน่วย, $PC = 17$ หน่วย แล้ว $ABCD$ จะมีพื้นที่เท่าไร



14. ให้สันทั้งหกของทรงสี่หน้า $ABCD$ มีความยาว 7, 13, 18, 27, 36 และ 41 หน่วย ถ้าสัน AB ยาว 41 หน่วย จงหาความยาวของ CD
15. แพน แม็ก และ วิชญ์ เล่นเกมจั่วไพ่กัน โดยนำไพ่มาก 10 ใบหมายเลข 1, 2, ..., 10 ในการเล่นแต่ละคนจะจับไพ่ขึ้นมา 1 ใบ โดยคนที่ได้แต้มมากที่สุดจะได้ตีเพื่อนอีก 2 คน (ใครก็ได้) A ครั้ง คนที่ได้แต้มเป็นอันดับสองจะได้ตี B ครั้ง และคนที่ได้แตมน้อยที่สุดจะได้ตี C ครั้ง (A, B, C เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $A > B > C > 0$) หลังจากเล่นครบตามจำนวนตาที่กำหนดแล้ว (ตีครบด้วย) แพนได้ตี 22 ครั้ง แม็กและวิชญ์ได้ตี 9 ครั้งเท่ากัน โดยในตาแรก แม็กจับไพ่แต้มมากที่สุด ถ้ามว่าใครจับไพ่ได้แต้มเป็นที่สองในครั้งที่ 3

16. วงกลม O สัมผัสวงกลม O_1, O_2, O_3, O_4 วงกลม O_1 สัมผัสวงกลม O_2, O_3 วงกลม O_2 สัมผัสวงกลม O_3, O_4 และวงกลม O_3 สัมผัสวงกลม O_4 ถ้ารัศมีวงกลม $O = 2$ และ รัศมีวงกลม $O_1 =$ รัศมีวงกลม $O_2 = 1$



จงหา รัศมีของวงกลม O_4

17. หลังจากการแข่งขัน TUGMOs ผู้จัดการแข่งขันมีความคิดว่าจะไปเที่ยวต่างจังหวัดด้วยกัน โดยมีสถานที่ที่อยากไปคือ พัทยา, ระยอง, ตราด และดำเนินการเลือกสถานที่ที่จะไปโดยให้ผู้จัดการแข่งขันทั้ง 20 คนเขียนชื่อสถานที่ที่อยากไปเรียงตามลำดับจากมากไปน้อยลงในกระดาษ เมื่อพิจารณาทุกใบพบว่า มี 11 คนอยากไปพัทยามากกว่าระยอง, 12 คนอยากไปตราดมากกว่าพัทยา และ 14 คนอยากไประยองมากกว่าตราด อยากทราบว่าสถานที่ใดถูกเลือกเป็นอันดับแรกมากที่สุด ถ้าทราบว่าทุกลำดับการเรียงสถานที่ปรากฏในกระดาษอย่างน้อย 1 ใบ

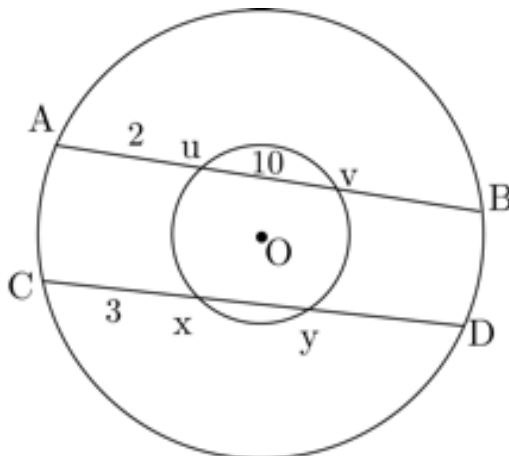
18. นิยาม $\Delta b = \frac{a^b}{a^b + \sqrt{a}}$ และให้

$$A = \left(1\Delta \frac{1}{2004}\right) + \left(2\Delta \frac{2}{2004}\right) + \left(3\Delta \frac{3}{2004}\right) + \dots + \left(1002\Delta \frac{1002}{2004}\right)$$

$$B = \left(1001\Delta \frac{1003}{2004}\right) + \left(1001\Delta \frac{1004}{2004}\right) + \left(999\Delta \frac{1005}{2004}\right) + \dots + \left(1\Delta \frac{2003}{2004}\right)$$

จงหาค่าของ $A + B$

19. วงกลมสองวงมีจุดศูนย์กลางร่วมกันที่ O ถ้า $AU = 2$, $UV = 10$, $CX = 3$



จงหา XY

20. ชายสามคนหลงเข้าไปในดินแดนของคนป่าและถูกจับตัวได้ เพื่อการอยู่รอดพวกเขาต้องตอบคำถามให้ถูกต้อง ชายทั้งสามถูกนำมาเรียงแถวตอนเรียงหนึ่งโดยที่คนหลังสุดสามารถมองเห็นหัวของอีกสองคน คนกลางสามารถมองเห็นหัวของคนหน้า คนหน้าสุดไม่สามารถมองเห็นใครเลย

คนป่าได้ให้ชายทั้งสามดูหมวก 5 ใบ เป็นสีดำ 3 ใบ สีขาว 2 ใบ ต่อจากนั้นก็ปิดตาชายทั้งสามคน แล้วใส่หมวก(5 ใบที่ให้ดู)ให้ชายทั้งสามคนคนละใบ ส่วนอีก 2 ใบนำไปซ่อนเสร็จแล้วจึงเปิดตาชายทั้งสามออก คำถามก็คือให้ใครก็ได้บอกว่าตนเองใส่หมวกสีอะไร ถ้าตอบถูกก็จะปล่อยตัวไป แต่ถ้าผิดก็จะถูกตัดศีรษะทั้งหมด

เมื่อเวลาผ่านไป ชายคนหน้าสุด(คนที่ไม่เห็นใครเลย)ตอบถูกว่าเขาใส่หมวกสีอะไร

ถามว่า ชายคนหน้าสุดใส่หมวกสีอะไร และทำไมจึงตอบได้

สมมุติว่าชายทั้งสามคนฉลาดและต้องการกลับบ้าน