

ข้อสอบ TUGMOs ครั้งที่ 3 รอบที่ 1  
สอบวันที่ 9 มกราคม 2549

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 21 มกราคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ  
ทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญา Creative Commons Attribution-Noncommercial-  
Share Alike 3.0

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>



ข้อสอบแข่งขันในโครงการสรรหานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์  
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ประจำปีการศึกษา 2548  
วิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น รอบที่ 1  
สอบวันจันทร์ที่ 9 มกราคม 2549 เวลา 08.20-11.20 น.

### คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้มี 4 ตอน ให้ผู้เข้าแข่งขันนำกลับไปได้
2. จากข้อ 1 จึงสามารถ ทด ลงในกระดาษข้อสอบได้
3. การตอบข้อสอบให้ตอบลงในกระดาษคำตอบโดยใช้ปากกาสีน้ำเงินหรือดำเขียนตอบ และเขียนชื่อ นามสกุล ชื่อทีมและเลขประจำตัวสอบในกระดาษคำตอบทุกหน้า ตามที่เว้นไว้
4. การตอบนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด ให้ตอบอยู่ในรูปอย่างง่าย
5. ไม่อนุญาตให้ออกจากห้องสอบก่อนเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง
6. เมื่อหมดเวลาสอบหรือเมื่อจะส่งกระดาษคำตอบให้หงายด้านหลังของกระดาษคำตอบขึ้น แล้ววางทิ้งไว้บนโต๊ะ แล้วจึงออกจากห้องสอบ
7. หากมีข้อสงสัยให้ยกมือขึ้นเหนือศีรษะเพื่อสอบถามจากกรรมการคุมสอบ
8. คำตัดสินของคณะกรรมการจัดสอบถือเป็นข้อยุติ
9. ไม่อนุญาตให้เปิดข้อสอบก่อนได้รับอนุญาตจากกรรมการคุมสอบ
10. ห้ามทุจริตในการสอบและไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณ
11. ข้อสอบนี้เป็นทรัพย์สินทางปัญญาของคณะกรรมการออกข้อสอบ ห้ามคัดลอกส่วนใดส่วนหนึ่งของข้อสอบเว้นแต่ได้รับอนุญาตจากคณะกรรมการ

### ความรู้ที่อาจเป็นประโยชน์

1. วงกลมเกิดจากจุดทุกจุดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากับรัศมี  $r$  บนระนาบ 2 มิติ
2. ระยะห่างระหว่างจุด  $P(a, b)$  กับ  $Q(c, d)$  คือ  $\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$
3.  $\pi \neq \frac{22}{7}$ ;  $\pi \neq 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460$

ตอนที่ 1 แบบเลือกตอบ 4 ข้อ โดยกาบาทลงในกระดาษคำตอบ คะแนนรวม 16 คะแนน

1. [3 คะแนน] จงหาจำนวนตัวประกอบทั้งหมดของจำนวนตัวประกอบของ 123,456,787,654,321

- 1) 5                      2) 10                      3) 20                      4) 81                      5) 162

2. [4 คะแนน] วงกลม  $O$  มี  $AB$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง  $C$  เป็นจุดบนวงกลมที่ทำให้  $\hat{AOC}$  เป็นมุมป้าน เส้นสัมผัสวงกลมที่ผ่านจุด  $C$  พบ  $AB$  ที่  $D$  และพบเส้นสัมผัสวงกลม  $O$  ที่จุด  $A$  ที่  $E$  ถ้า  $|OE| \cdot |BC| = 8$  และ  $\frac{|CD|}{|AE|} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$

จงหาค่าของ  $BD$

- 1) 2                      2)  $\frac{4}{3+2\sqrt{3}}$                       3)  $\frac{2}{2\sqrt{3}+3}$                       4) 4                      5) ไม่มีข้อใดถูก

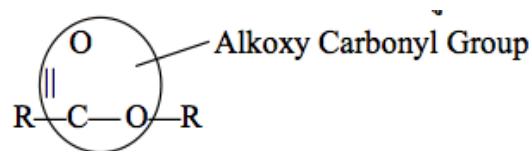
3. [5 คะแนน] พิจารณาลำดับของจำนวนเต็มบวก 1, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 3, 3, 3, 5, 3, 4, 4, 6, 4, 5, 4, ...

จงหาผลบวก 2005 พจน์แรก

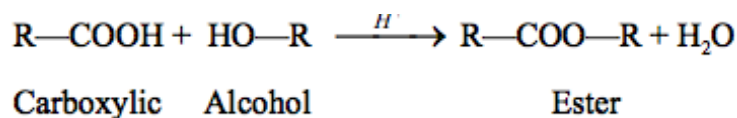
- 1) 253,006                      2) 282,376                      3) 282,413                      4) 282,916                      5) ไม่มีข้อใดถูก

4. [4 คะแนน] ข้อใดไม่ถูกต้อง เมื่อข้อมูลทางวิทยาศาสตร์ที่ให้(นอกหลักสูตร) ถูกต้อง

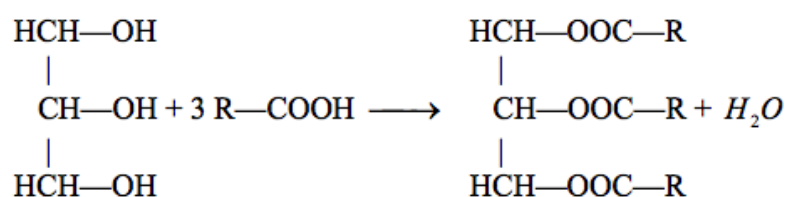
(a) เอสเทอร์ (Ester) เป็นสารประกอบคาร์บอนชนิดหนึ่งมีสูตรทั่วไปคือ



เกิดจากการทำปฏิกิริยาเอสเทอริฟิเคชัน (Esterification) ระหว่างแอลกอฮอล์ (Alcohol) และกรดคาร์บอกซิลิก (Carboxylic acid) โดยมีกรดเป็นตัวเร่งปฏิกิริยา ดังสมการ



ไขมันหรือน้ำมัน เป็นสารเอสเทอร์ประเภทหนึ่ง เกิดจากกรดไขมัน ไปทำปฏิกิริยากับกลีเซอรอล (ไตรไฮดรอกซีโพรเพน; Trihydroxypropane) โดยกลีเซอรอล 1 โมเลกุลสามารถทำปฏิกิริยากับกรดไขมันได้ 1-3 โมเลกุล ดังสมการ



ดังนั้น ถ้ามีกรดไขมัน 4 ชนิด คือ กรดสเตียริก 2 โมเลกุล, กรดปาล์มิติก 2 โมเลกุล, กรดไมริสติก 1 โมเลกุล, กรดไลโนเลนิก 1 โมเลกุล สามารถทำปฏิกิริยากับ ไตรไฮดรอซี โพรเพน 1 โมเลกุลเกิดไขมันหรือน้ำมันที่แตกต่างกัน 10 แบบ

- (b) ตารางธาตุในปัจจุบันจัดเรียงธาตุตามเลขอะตอมจากน้อยไปหามาก มี 7 คาบ (Period) โดยยึดตามกฎพีริออดิก (Periodic law) ของดมิทรี อิวาโนวิช เมนเดเลเยฟ (Dmitri Ivanovic Mendeleev) ซึ่งกล่าวว่าธาตุแต่ละชนิดจะมีสมบัติสอดคล้องกันตามหมู่ โดยนักวิทยาศาสตร์จัดธาตุเป็น 2 กลุ่มใหญ่ คือ ธาตุกลุ่ม A และ กลุ่ม B โดยธาตุกลุ่ม A แบ่งเป็น 8 หมู่ และธาตุกลุ่ม B แบ่งเป็น 2 กลุ่มย่อย ได้แก่ ธาตุแทรนซิชัน (Transition) และ ธาตุอินเนอร์แทรนซิชัน (Inner Transition)

ทองคำ เป็นธาตุหนึ่งในตารางธาตุ มีเลขอะตอม 79 มวลอะตอม 196.96552 CAS Registry ID 7440-57-5 อยู่ในหมู่ 1B คาบที่ 6 เป็นโลหะ มีสถานะเป็นของแข็งที่อุณหภูมิห้อง พบมากในรูปสารประกอบออร์ริกคลอไรด์ ( $\text{AuCl}_3$ ; Gold (III) Chloride) และกรดคลออรอริก ( $\text{HAuCl}_4$ ) ทองคำมีจุดเดือดที่  $2856^\circ\text{C}$  จุดหลอมเหลว  $1064.18^\circ\text{C}$  ความหนาแน่น 19300 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร สัมประสิทธิ์ความต้านทาน  $2.2 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$  ดังนั้น ทองคำ 1.93 บาท มีปริมาตร 0.1 ลูกบาศก์เซนติเมตร

- (c) ในการพิจารณาค่าความต้านทานไฟฟ้าของตัวนำไฟฟ้าพบว่า ความต้านทานไฟฟ้าแปรผันตามความยาวของตัวนำ และแปรผันแบบผกผันกับพื้นที่หน้าตัด ถ้าลวดทองคำยาว 10 เมตร พื้นที่หน้าตัด 0.001 ตารางมิลลิเมตร จะมีความต้านทาน  $220 \Omega$  จะได้ว่าลวดทองคำยาว  $L$  เมตร พื้นที่หน้าตัด  $A$  ตารางเมตร ความต้านทาน  $R$  โอห์ม จะมีค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทาน  $(\frac{RA}{L})$  เท่ากับ  $2.2 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$
- (d) สาร A ประกอบด้วยโปรตีน 4.45% คาร์โบไฮเดรต 61% ไขมัน 15.3% วิตามิน 8.05% เกลือแร่ 6.1% ที่เหลือเป็นน้ำ ดังนั้นเมื่อร่างกายสลายสาร A จะให้พลังงาน 399.5 กิโลแคลอรี ถ้ากำหนดให้ โปรตีนและคาร์โบไฮเดรตให้พลังงาน 4 กิโลแคลอรีต่อกรัม ไขมันให้พลังงาน 9 กิโลแคลอรีต่อกรัม

- 1) ข้อ (a)    2) ข้อ (b)    3) ข้อ (c)    4) ข้อ (d)    5) มีข้อที่ไม่ถูกต้องมากกว่า 1 ข้อ

ตอนที่ 2 แบบเติมคำตอบ 8 ข้อ คะแนนรวม 27 คะแนน

1. [3 คะแนน] การที่จะพิจารณาว่าสมการกำลังสองมีคำตอบหรือไม่นั้น พิจารณาจากสิ่งใด  
จงอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งนั้นกับจำนวนคำตอบที่เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันของ  
สมการกำลังสอง
2. [3 คะแนน] แพนโตกราฟ (Pantograph) คืออะไร
3. [3 คะแนน] จงให้ความหมายของคำว่า “อนิยาม” และ “ทฤษฎีบท”
4. [1 คะแนน] ให้  $a$  เป็นความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดทั้งสองของ  $2x + y + 142536 = 0$   
และ  $x^2 + y^2 + 67x + 71y + 101 = \sqrt[3]{152634^9}$  จงหา  $a$
5. [5 คะแนน] จากข้อ 4 ให้  $b$  เป็นผลบวกค่า  $x$  ที่เป็นคำตอบที่เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน  
ของระบบสมการ  $x - y = 4$  และ  $\frac{34}{x^2(y+2)-5y-14} - \frac{10}{xy+3} - \frac{2}{y+6} = 1$  และ  $c$  เป็น  
จำนวนจริงที่ทำให้  $x + c$  ผ่านจุด  $(a, b)$  จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่าน  $(a, c)$  และมีความชัน  $b$   
(ตอบในรูป  $Ax + By + C = 0$  เมื่อ  $A > 0$  และ หรม. $(A, B, C) = 1$ )
6. [4 คะแนน] กำหนดวงกลม 1 วงบนระนาบ วัดสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากแนบในวงกลม  
ดังกล่าว แล้ววัดวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางคือด้านประกอบมุมฉากของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  
มุมฉากนั้น แล้ววัดสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากแนบในวงกลมที่สอง ทำเช่นนี้เรื่อยไป จงหา  
พื้นที่สามเหลี่ยมรูปที่เกิดจากการกระทำดังกล่าวครั้งที่ 5 เมื่อสามเหลี่ยมรูปที่ใหญ่ที่สุดมี  
พื้นที่  $A$  ตารางหน่วย
7. [5 คะแนน] จากข้อ 6 จงหาความยาวเส้นรอบวงของวงกลมทั้งหมดในรูปที่เกิดจากการ  
กระทำดังกล่าว 5 ครั้งทั้งหมด เมื่อรัศมีวงกลมใหญ่ที่สุดเท่ากับ  $r$  เมตร
8. [3 คะแนน] จากข้อ 6 จงวาดรูปที่เกิดจากการกระทำดังกล่าว 3 ครั้ง

ตอนที่ 3 แบบเติมคำตอบ 10 ข้อ คะแนนรวม 46 คะแนน

1. [4 คะแนน] ให้  $a$  เป็นจำนวนตัวประกอบทั้งหมดของ 123,  $b$  เป็นจำนวนตัวประกอบที่เป็นบวกของ 456,  $c$  เป็นจำนวนตัวประกอบที่เป็นลบของ 789,  $d = \text{หรม.}(a + b, b + c)$ ,  $e = \text{หรม.}(b + c, c + a)$ ,  $f = \text{หรม.}(c + a, a + b)$

จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกตัวเลขตั้งแต่ 10 ถึง 24 แล้วได้ตัวเลขที่หรม.ของตัวเลขที่ได้ กับ  $a + b + c + d + e + f$  เท่ากับ 2 (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

2. [4 คะแนน] พาราโบลา  $Ax^2 + Bx + C + Dy = 0$  มีจุดต่ำสุดอยู่ที่จุดตัดของ  $4x - 3y - 18 = 0$  และ  $3x + 4y - 1 = 0$  และผ่านจุดตัดแกน  $x$  ทางบวกของ

$$\sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2 + 3(x-3) + 4(x-4) + 17} + y = 0$$

ถ้า หรม.ของ  $A, B, C, D$  เท่ากับ 2 แล้ว จงหาค่าของ  $\frac{A-C}{D} - B$

3. [4 คะแนน] ข้อความต่อไปนี้ถูกก็ข้อและข้อใดถูกต้องบ้าง

(a) จำนวนคำตอบทั้งหมดของระบบสมการ

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} &= 9 \\ \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y} - \sqrt[6]{z} &= 3\end{aligned}$$

มีค่าน้อยกว่า  $\frac{2\pi}{5}$

(b) ถ้าเส้นตรงผ่านจุด  $(3, x)$  และ  $(2x + 1, 1)$  มีความชันเท่ากับ 2 แล้วระยะระหว่างจุด  $(7, 4)$  และ  $(x, 3)$  มีค่ามากกว่า  $\frac{2433}{400}$

(c) จากความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับมาตราไทยโบราณที่เคยได้ยินหรือได้อ่านจากวรรณกรรมต่างๆ จะได้ว่า 7 เมล็ดข้าว มีค่าเท่ากับผลต่างของ 1 นิ้ว กับ 32,768 ปรมาณู

4. [4 คะแนน] จงหาค่าของ  $\frac{x(z+w)}{y}$  เมื่อ  $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+4}$ ,  $z = |\sqrt{|y-4|+y} - y|$  และ  $(z-w)^2 + \left(\frac{2}{z} + \frac{3}{w} - 5\right)^4 = 0$

5. [4 คะแนน] สามเหลี่ยมหน้าจั่ว  $ABC$  มี  $AB = AC$  และมุม  $\hat{BAC} = 33.4^\circ$  สมมติ จุด  $X, Y, Z$  เป็นจุดบนด้าน  $AB, BC, CA$  ที่  $BX = YC$  และ  $BY = CZ$  และวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม  $BXY$  และ  $CYZ$  ตัดกันที่จุด  $P$  จงหา  $\hat{BPC}$

6. [5 คะแนน] ให้

$$\frac{A}{(x+7)^2} + \frac{B}{(x+7)} + \frac{C}{(x-19)^2} + \frac{D}{(x-19)} + \frac{133E}{(133x+1)} = \frac{7x^4 + 89x^3 - 67x^2 + 367x - 266}{(133x+1)(x^2 - 12x - 133)^2}$$

สำหรับทุก  $x$  โดยที่  $x \neq -7, 19, -\frac{1}{133}$

จงหาค่าของ  $\frac{A}{49} + \frac{C}{361} - \frac{26D}{133} + \frac{930E}{7}$

7. [5 คะแนน] ให้  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม  $ABC$ ,  $D$  เป็นจุดที่อยู่ตรงข้ามกับ  $C$  และ  $DOC$  อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันที่ทำให้  $DC = 3AO$  และ  $AD$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลม  $O$

ต่อ  $CB$  ไปถึงจุด  $E$  โดย  $CB = BE$  และต่อ  $ED$  พบ  $CA$  ที่จุด  $F$  ถ้า  $AB$  ตั้งฉากกับ  $CD$  ที่  $G$  จงหาอัตราส่วนของพื้นที่วงกลมล้อมรอบ  $DFG$  ต่อพื้นที่วงกลมล้อมรอบ  $ACD$

8. [6 คะแนน] วงกลม  $O$  มี  $AB$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 2 หน่วย  $C$  เป็นจุดบนวงกลมที่ทำให้  $ABC$  เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว,  $CD$  แบ่งครึ่ง  $AO$  ที่  $E$  และพบวงกลมที่  $F$ ,  $FO$  พบวงกลมที่  $G$ ,  $BH$  แบ่งครึ่ง  $CO$  ที่  $H$  และพบ  $FG$ ,  $AC$  และวงกลม  $O$  ที่  $I, J, K$  ตามลำดับ

กะพวงเริ่มเดินจาก  $O$  ผ่านส่วนของเส้นตรง  $OA, AJ, JI, IO$  จงหาว่า กะพวงเดินได้ระยะทางทั้งหมดเท่าไร

9. [6 คะแนน] ให้  $x$  เป็นจำนวนตรรกยะที่เป็นคำตอบของระบบสมการ

$$A - B = -3(2x - 1)$$

$$A + 2B = 3x^2 + 6$$

$$\left(\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{B^2}\right) \left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} - \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{A}} + \sqrt[3]{\frac{1}{B}}}\right) \left(\sqrt{\frac{A}{B}} + \sqrt{\frac{B}{A}} - 1\right) = \frac{24x^2 - 6x - 3}{x^2 - x - 2}$$

จงหาค่าของ  $2x + 3A$  ทั้งหมดที่เป็นไปได้

10. [4 คะแนน] จงแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส 6, 7, 8 รูปที่ไม่มีส่วนที่ซ้อนกันและไม่มีช่องว่างเหลือ

#### ตอนที่ 4 แบบแสดงวิธีคิด 1 ข้อ คะแนน 11 คะแนน

ก่อนการแข่งขัน TUGMOs ครั้งที่ 3 คณะผู้จัดการแข่งขันได้ทำเฉลยคำตอบรอบที่ 1 ตอนที่ 1 หายไป เนื่องจากมีผู้ทราบคำตอบเพียงคนเดียว คือ ผู้แต่งโจทย์เท่านั้น ซึ่งในวันแข่งขันก็ได้ หายตัวไปเช่นเดียวกัน แต่ผู้แต่งโจทย์ก็ได้ฝากข้อความไว้กับคณะกรรมการจัดการแข่งขันได้แก่

“ ในการแข่งขัน TUGMOs (Triamudom 5+8+10946+13+55+21 34+10946+1+377 & 21+610+55+5+610+1+10946+6765+10946+17711+987 6765+10946+610+8+5+17711+10946+6765 Searching) ขอให้กรรมการคุมสอบเตือนผู้เข้าสอบให้ตั้งอยู่ในความไม่ประมาท โดยกรอกข้อมูลลงในกระดาษคำตอบทั้ง 2 แผ่นให้ครบถ้วนและชัดเจน และ ใช้ปากกาสีน้ำเงินหรือดำเท่านั้นในการตอบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการไม่ทุจริตในการสอบ โดยการปฏิบัติตามหลักธรรมทางพระพุทธศาสนาเรื่อง กุศลกรรมบถ 10 ซึ่งแบ่งได้เป็น 3 ข้อใหญ่ๆ คือ กายสุจริต 3 ได้แก่ ไม่ฆ่าสัตว์ ไม่ลักทรัพย์ที่เจ้าของไม่ให้ ไม่ประพฤตินิดในกาม, วจีสุจริต 4 ได้แก่ ไม่พูดปด ไม่พูดคำหยาบ ไม่พูดเพ้อเจ้อ ไม่พูดส่อเสียด, มโนสุจริต 3 ได้แก่ ไม่โลภ ไม่พยาบาท ไม่มีมิจฉาทิฐิ รวมทั้งการพอใจในสิ่งที่ตนมีตนได้ กล่าวคือ แม้ผู้สอบจะทำข้อสอบได้มากน้อยเพียงใด ก็จงพอใจที่เราทำได้ด้วยความสามารถของตนเอง เพราะมีแต่ตัวผู้สอบเท่านั้นที่ช่วยผู้สอบได้ สมดังพุทธศาสนสุภาษิตที่ว่า ‘อตุตทาหิ อตุตโน นาโถ’ ซึ่งหมายความว่า ‘ตนแลเป็นที่พึ่งแห่งตน’ ”

แต่เนื่องจากผู้แต่งโจทย์ทราบว่า ตนเป็นผู้ที่ทราบคำตอบของข้อสอบแข่งขันในโครงการสรรหานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาประจำปี 2548 วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น รอบที่ 1 ตอนที่ 1 เพียงผู้เดียว จึงได้ส่งคำใบ้เพื่อหาคำตอบดังกล่าวมาเป็นรหัสว่า 55+3+3+1+610+987+2+55+13

จงหา ว่าความหมายของ 55+3+3+1+610+987+2+55+13 ที่ผู้แต่งโจทย์ส่งมาคืออะไร