

ข้อสอบ TUGMOs ครั้งที่ 3 รอบที่ 2  
สอบวันที่ 9 มกราคม 2549

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 21 มกราคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ  
ทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญา Creative Commons Attribution-Noncommercial-  
Share Alike 3.0

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>



ข้อสอบแข่งขันในโครงการสรรหานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์  
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ประจำปีการศึกษา 2548  
วิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น รอบที่ 2  
สอบวันจันทร์ที่ 9 มกราคม 2549 เวลา 12.45-13.45 น.

### คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้มี 20 ข้อ
2. ใช้เวลาสอบ 1 ชั่วโมง ห้ามเปิดข้อสอบก่อนได้รับอนุญาต
3. การส่งระหว่างการแข่งขันให้แยกส่งเป็นข้อๆ โดยกรอกข้อมูลลงในกระดาษคำตอบให้ครบถ้วนชัดเจนและจัดคำตอบให้อยู่ในรูปอย่างง่ายโดยใช้ปากกาสีน้ำเงินหรือสีดำเท่านั้น
4. อนุญาตให้ปรึกษาภายในทีมเดียวกันได้ โดยไม่ส่งเสียงรบกวนผู้อื่น
5. หากมีข้อสงสัยประการใดให้ยกมือขึ้นเหนือศีรษะเพื่อถามกรรมการคุมสอบ
6. ห้ามทุจริตในการสอบ และไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณ
7. คำตัดสินของคณะกรรมการถือเป็นข้อยุติ
8. ในแต่ละข้อ ทีมที่ตอบถูกเป็นทีมแรกจะได้ 50 คะแนน ทีมต่อไปที่ตอบถูกจะได้ 45, 44, 43, ... คะแนน ตามลำดับ
9. ในช่วง 5 นาทีแรก ทีมที่ตอบถูกจะได้คะแนนในข้อนั้นเพิ่ม 5 คะแนน แต่จะถูกหักครั้งละ 13 คะแนน หากตอบผิด
10. ในช่วง 5 นาทีสุดท้าย จะไม่รับการส่งคำตอบจนกว่าเวลาจะหมด กล่าวคือ เมื่อหมดเวลาแต่ละทีมสามารถส่งคำตอบสุดท้ายของแต่ละข้อได้ในกระดาษคำตอบที่แจกให้ (ที่มี 20 ข้อ) โดยไม่จำเป็นต้องตอบทุกข้อ
11. ก่อน 5 นาทีสุดท้ายแรกสำหรับแต่ละข้อ การตอบผิดครั้งที่ 1, 2 และครั้งที่สาม จะประกาศแจ้งให้ทราบ และหักคะแนนข้อนั้น 5 คะแนน(ยกเว้นภายใน 5 นาทีแรกจะหัก 13 คะแนน) และจะไม่อนุญาตให้ส่งข้อนั้นในอีกภายใน 10% ของเวลาที่เหลือทั้งหมด (จะประกาศให้ทราบที่สามารถส่งข้อนั้นใหม่ได้เมื่อใด และหากส่งมาอีกภายในเวลา 10% นั้น จะหักคะแนนข้อนั้นอีก 10 คะแนนไม่ว่าถูกหรือผิด) การตอบผิดครั้งต่อไป จะประกาศแจ้งให้ทราบและเชิญผู้เข้าแข่งขันในทีมออกจากการแข่งขันครั้งละ 1 คนโดยไม่มีโอกาสกลับเข้ามาใหม่
12. คะแนนในแต่ละข้อยึดตามการส่งครั้งสุดท้าย ยกเว้นการหักคะแนนจะมีผลสะสม

1. สามเหลี่ยมมุมฉาก  $ABC$  มี  $B$  เป็นมุมฉาก วงกลมแนบในสามเหลี่ยม  $ABC$  จุดศูนย์กลางที่จุด  $O$  สัมผัสด้าน  $AB, BC, CA$  ที่จุด  $D, E, F$  ตามลำดับ  $DE, EF, FD$  ตัดเส้นแบ่งครึ่งมุม  $B, C, A$  ที่จุด  $G, H, I$  ตามลำดับ ถ้า  $m(\hat{AHC}) = 140^\circ$  จงหาขนาดของ  $\hat{GIO}$
2. วงกลม  $O$  มี  $AB$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางยาว  $2r$  หน่วย คอร์ด  $CD$  แบ่งครึ่ง  $AO$  ที่  $E$ , จุด  $F$  เป็นจุดกึ่งกลางส่วนโค้งน้อย  $BC, DF$  ตัด  $AB$  ที่  $G$  และแบ่งครึ่งคอร์ด  $BC$  ที่  $H$  จงหาพื้นที่รูปเหลี่ยมที่มีจุด  $C, E, G, O, H$  เป็นจุดมุม
3. สามเหลี่ยม  $ABC$  มีเส้นรอบรูป  $360$  หน่วย มีพื้นที่  $2100$  ตารางหน่วย เส้นส่วนสูงจาก  $A, B, C$  พบ  $BC, CA, AB$  ที่  $D, E, F$  ตามลำดับ และเส้นส่วนสูงทั้งสามพบกันที่  $H$   
ถ้า  $CF$  ยาว  $(\sqrt{-x^2} + \sqrt{(x-3)(x-7)} + 3)^2$  หน่วย จงหาค่าของ  $|HA| \cdot |HD|, |HB| \cdot |HE|$  และ  $|HC| \cdot |HF|$
4. สามเหลี่ยม  $ABC$  มี  $AD$  เป็นเส้นส่วนสูงที่ตัด  $BC$  ที่  $D$ , ส่วนสูง  $DE$  ของสามเหลี่ยม  $ADC$  พบ  $CA$  ที่  $E$ , จุด  $F$  เป็นจุดบน  $DE$  ที่ทำให้  $AF$  ตั้งฉากกับ  $BE$   
ถ้า  $AB = 39, AE = 9, EC = 16$  จงหา  $FE : FD$
5. วงกลมจุดศูนย์กลางที่  $O$  มี  $BA$  เป็นเส้นสัมผัสที่จุด  $A$ , จุด  $C$  เป็นจุดบนวงกลมที่ทำให้  $AC$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม,  $D$  เป็นจุดที่อยู่ตรงข้ามกับ  $B$  ที่ทำให้เส้นเชื่อมจุดรวมเส้นแบ่งครึ่งด้านของสามเหลี่ยม  $ABC$  และสามเหลี่ยม  $ABD$  ขนานกับ  $AB$  และยาวเป็นหนึ่งในสามของ  $AB, DA$  ตัดวงกลม  $O$  ที่  $A$  และ  $E$  โดยที่  $OE$  ขนานกับ  $AB, BE$  ตัด  $OA$  ที่  $F, DF$  พบ  $AB$  ที่  $G$  อัตราส่วนของพื้นที่วงกลม  $O$  ต่อพื้นที่สี่เหลี่ยม  $BCDG$  เป็นเท่าไร
6. จงหาชุดคำตอบ  $(x, y, z)$  ทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  เป็นจำนวนเต็ม
7. จงหาจำนวนของจำนวนเต็มบวกซึ่งมีค่าน้อยกว่า  $934$  ที่เมื่อลบตัวเลขในหลักหน่วยออกแล้ว จำนวนที่เกิดขึ้นใหม่หารจำนวนเดิมลงตัว
8. กำหนดให้  $m$  หาร  $4672$  และ  $9974$  เหลือเศษ  $n$  และ  $2n$  ตามลำดับ ถ้า  $m$  เป็นจำนวนเต็มบวกและ  $n$  เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาชุดคำตอบ  $(m, n)$  ทั้งหมดที่เป็นไปได้
9. ให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป  $2^d \cdot 3^e \cdot 5^f$  โดย  $d, e, f$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้  $\text{หรม.}(a, b) = 150$   $\text{หรม.}(b, c) = 30$   $\text{หรม.}(c, a) = 120$  และ  $c < a < b < 2005$   
จงหาจำนวนชุดคำตอบ  $(a, b, c)$  ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
10. ให้  $x$  เป็นรากของสมการ  $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} = 1$ ,  $y$  เป็นรากของสมการ  $\sqrt{1-y} + \sqrt{y} = 1$  โดยที่  $y \neq x$  และ  $z = x^y + y^x$  แล้ว จงหาจำนวนพหุนามดีกรีไม่เกิน 5 ที่มีรากของพหุนามคือ  $xy, yz, zx$  เท่านั้นและ หรม. ของสัมประสิทธิ์ทุกพจน์ของพหุนามเท่ากับ  $9012549$
11. จากข้อความต่อไปนี้เมื่อนำเลขโดดหน้าข้อที่ถูกต้องมาจัดเรียงใหม่โดยไม่ใช้เลขซ้ำกันเลย และมีค่าน้อยกว่า  $50,000$  ได้กี่จำนวน

- (0) ในการหาหมวดของนักศึกษาวิชาทหารเพื่อเป็นตัวแทนในการสอบภาคปฏิบัติของศูนย์ฝึก ส.พัน 1 รอ. ได้ให้หัวหน้าหมวดมาขึ้นเรียงแถวแล้วนับเลข 1, 2, 3, ... โดยจัดเป็นแถวหน้ากระดานเรียงหนึ่งปิดระยะ โดยหัวหน้าหมวดที่ 1 ยืนอยู่ด้านซ้ายของหมวดที่ 3 ซึ่งยืนอยู่ติดกับหมวดที่ 2 และหมวดที่ 5 ซึ่งยืนอยู่ติดกับหัวหน้าหมวดที่ 1 และยืนอยู่ด้านขวาของหัวหน้าหมวดที่ 6 ซึ่งยืนอยู่ริมสุด และนอกจากนั้นหัวหน้าหมวดที่ 4 ยืนอยู่ด้านริมสุดอีกด้านหนึ่ง เมื่อให้หัวหน้าหมวดที่ยืนอยู่ขวาสุดนับก่อน โดยนับไปกลับไปเรื่อยๆ โดยคนริมสุดนับเพียง 1 ครั้งใน 1 รอบ ส่วนคนกลางนับ 2 ครั้งใน 1 รอบ และเมื่อนับถึงตัวเลขที่ต้องการแล้วหมวดของคนที่นับเลขนั้นจะถูกคัดออก แล้วคนที่เหลืออยู่เริ่มนับ 1 ใหม่ เป็นเช่นนี้เรื่อยไป ถ้าตัวเลขที่ต้องการในครั้งที่ 1 และ 2 คือ  $\frac{777\dots 77}{2549 \ 7s}$  และ 2549 ตามลำดับ หมวดที่ถูกคัดออกคือหมวดที่ 1

และหมวดที่ 5

- (1) การพิสูจน์เรขาคณิตที่ว่า ให้  $P, Q$  เป็นจุดบนด้าน  $AB, R$  เป็นจุดบนด้าน  $BC$  และ  $S$  เป็นจุดบนด้าน  $CA$  ของรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  โดยที่  $\frac{AQ}{QB} = \frac{BP}{PA} = \frac{BR}{RC} = \frac{AS}{SC} = 2$  แล้ว พื้นที่ห้าเหลี่ยม  $PQRCS$  เป็น  $\frac{5}{9}$  เท่าของพื้นที่สามเหลี่ยม  $ABC$  มีวิธีหนึ่งสามารถใช้ในการเลือกรูปพิสูจน์ได้
- (2) เมื่อเปรียบเทียบพื้นที่ผิวของทรงกลม, ทรงกระบอก, กรวยกลม, พีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส, และลูกบาศก์ ที่มีรัศมีของฐานเท่ากับความสูงเท่ากับความยาวด้านฐานเท่ากับรัศมีทรงกลม จะได้ว่า พื้นที่ผิวของลูกบาศก์น้อยกว่าพื้นที่ผิวของกรวย และพื้นที่ผิวทรงกระบอกมีค่ามากที่สุด
- (3) เมื่อเปรียบเทียบปริมาตรของทรงกลม, ทรงกระบอก, กรวยกลม, พีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส, และลูกบาศก์ ที่มีรัศมีของฐานเท่ากับความสูงเท่ากับความยาวด้านฐานเท่ากับรัศมีทรงกลม จะได้ว่า ปริมาตรของลูกบาศก์น้อยกว่าปริมาตรของกรวย และปริมาตรทรงกระบอกมีค่ามากที่สุด
- (4) เมื่อเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของทรงกลม, ทรงกระบอก, กรวยกลม, พีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส, และลูกบาศก์ ที่มีรัศมีของฐานเท่ากับความสูงเท่ากับความยาวด้านฐานเท่ากับรัศมีทรงกลม จะได้ว่า อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของลูกบาศก์น้อยกว่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของกรวย และอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของทรงกระบอกมีค่ามากที่สุด
- (5) จากการทดลองของบอยล์และชาร์ลส์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของความดัน, ปริมาตร, และอุณหภูมิเมื่อจำนวนอนุภาคของแก๊สเท่ากัน ได้ว่า ความดันแปรผันแบบผกผันกับปริมาตร และ ปริมาตรแปรผันโดยตรงกับอุณหภูมิ จะได้ว่า อุณหภูมิแปรผันแบบผกผันกับความดัน
- (6) ให้  $A_n = 9^{\overbrace{\dots}^9}$  มี 9 อยู่  $n$  ตัว และ  $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$  และ  $G_n = A_1 A_2 \dots A_n$  จะได้ว่า  $S_n - \sqrt[n]{G_n} = 9$

- (7) ให้  $A_x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $B_x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  เมื่อ  $x$  เป็นจำนวนจริง และ  $e$  เป็นค่าคงตัวซึ่งมีค่าประมาณ 2.718281828459045235360287471352662497757 แล้วจะได้ว่า  $A_{x+y} = A_x B_y - A_y B_x$
- (8) โดยปกติ ผู้หญิงในช่วงวัยเจริญพันธุ์ จะสร้างเซลล์ไข่ได้ 1 เซลล์ต่อเดือน ถ้าผู้หญิงเริ่มมีประจำเดือนครั้งแรกเมื่ออายุ 12 ปี และหมดประจำเดือนเมื่ออายุ 50 ปี ผู้หญิงจะสร้างเซลล์ไข่ได้ 450 เซลล์
- (9) ถ้า รายได้ประชาชาติคือ มูลค่ารวมของสินค้าและบริการขั้นสุดท้ายที่ประชาชาติผลิตขึ้นได้ใน 1 ปีโดยหักค่าเสื่อมราคาออก, ผลิตภัณฑืประชาชาติเบื้องต้นคือ มูลค่ารวมของสินค้าและบริการขั้นสุดท้ายที่ประชาชาติผลิตขึ้นในเวลา 1 ปี, ผลิตภัณฑืในประเทศเบื้องต้นคือ มูลค่ารวมของสินค้าและบริการขั้นสุดท้ายที่ผลิตขึ้นในประเทศในเวลา 1 ปี ดังนั้น เมื่อ ผลิตภัณฑืในประเทศเบื้องต้นเท่ากับ 1,000,000,000 บาท ค่าเสื่อมราคาเท่ากับ 25,000,000 บาท มูลค่าที่ชาวต่างชาติผลิตได้ในประเทศเท่ากับ 150,000,000 บาท มูลค่าที่ประชาชาติผลิตได้ในต่างประเทศเท่ากับ 30,000,000 บาท จะได้ว่า ผลิตภัณฑืประชาชาติเบื้องต้นเท่ากับ 855,000,000 บาท

12. a) กำหนด  $\{E, F, I, N, O, R, S, T, X, Y\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  และ

$$\begin{array}{r} F O R T Y \\ T E N + \\ T E N \\ \hline S I X T Y \\ \hline \hline \end{array}$$

จงหา FORTY, TEN, SIXTY ทั้งหมดที่เป็นไปได้

- b) กำหนด  $0 \leq D, E, M, N, O, R, S, Y \leq 9$  โดยที่  $D, E, M, N, O, R, S, Y$  แตกต่างกันทั้งหมด และ

$$\begin{array}{r} S E N D + \\ M O R E \\ \hline M O N E Y \\ \hline \hline \end{array}$$

จงหา DRESS, MONEY ทั้งหมดที่เป็นไปได้

13. กำหนด  $a \otimes b = ab + a + b$  จงหาจำนวนสุดท้ายที่เกิดจากการกระทำ  $\otimes$  332 ครั้งของ  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{334}$

14. จงหาค่าประมาณทศนิยม 2 ตำแหน่งของผลบวกของคำตอบที่เป็นจำนวนจริงทั้งหมดของสมการ  $|\sqrt{x|x-2|+2}-5|=4$

15. ให้  $(x, y, z)$  เป็นรากของสมการ

$$\left( \frac{\sqrt[4]{x-y-z} + \sqrt{x^5+y^5+z^5-xy-yz-zx+xyz}}{\sqrt{-x(y+z)} + \sqrt{y+z-x} - \sqrt[3]{x+xy+xyz+z}} \right)^2 = y^2 - 5z + 2x + 1$$

จงหาค่าของ  $(x, y, z)$  ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

16. จงหาคำตอบ  $(w, x, y, z)$  ของระบบสมการ

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy - z^2 = 25 \\ \sqrt[3]{wx - 6} - \sqrt[3]{2y - 7w} = \sqrt[3]{6w + 20} \end{cases}$$

17. พิจารณาระบบสมการ

$$a + 3b + 8c + 15d + 24e + 35f + 48g = 934$$

$$4a + 9b + 16c + 25d + 36e + 49f + 64g = 334$$

$$9a + 17b + 26c + 37d + 50e + 65f + 82g = 326$$

จงหาค่าของ  $17a + 24b + 25c + 24d + 21e + 16f + 9g$

18. กาลครั้งหนึ่งนานมาแล้ว มีหมู่บ้านไม้มะค่า หมู่บ้านช่อมะกอก และหมู่บ้านก้านมะยมตั้งอยู่เรียงกันตามลำดับจากทิศเหนือไปได้ โดยตั้งอยู่บนแม่น้ำสายหนึ่งโดยระยะทางตามแม่น้ำสายนี้จากหมู่บ้านไม้มะค่าไปยังหมู่บ้านช่อมะกอก และจากหมู่บ้านช่อมะกอกไปยังหมู่บ้านก้านมะยมเท่ากับ 4 และ 6 กิโลเมตรตามลำดับ อยู่มาวันหนึ่ง นาย ก. และนาย ข. ซึ่งอาศัยอยู่ในหมู่บ้านก้านมะยม ต้องขึ้นไปทำธุระที่หมู่บ้านไม้มะค่า จึงพายเรือขึ้นไปตามแม่น้ำสายดังกล่าว ซึ่งขณะนั้นมีกระแสน้ำไหลจากเหนือลงสู่ใต้ด้วยอัตราเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง โดยในช่วงแรก นาย ก. เป็นคนพายเรือจนไปถึงหมู่บ้านช่อมะกอก ทั้งคู่จึงแวะพักผ่อนและซื้อของเป็นเวลาครึ่งชั่วโมง ก่อนที่นาย ข. จะเป็นคนพายเรือต่อไปถึงหมู่บ้านไม้มะค่า ใช้เวลารวมทั้งสิ้น 2 ชั่วโมง จากหมู่บ้านก้านมะยมไปยังหมู่บ้านไม้มะค่า ในปีถัดมา ทั้งสองคนจำเป็นต้องขึ้นไปทำธุระที่หมู่บ้านไม้มะค่าอีกครั้ง ในครั้งนี้มีกระแสน้ำไหลจากเหนือลงสู่ใต้ด้วยอัตราเร็ว 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง โดยในช่วงแรก นาย ข. เป็นคนพายเรือจนไปถึงหมู่บ้านช่อมะกอก ทั้งคู่จึงแวะพักผ่อนและซื้อของเป็นเวลา 1 ชั่วโมง ก่อนที่นาย ก. ซึ่งมีความเร็วพายเพิ่มขึ้น 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะเป็นคนพายเรือต่อไปถึงหมู่บ้านไม้มะค่า ใช้เวลารวมทั้งสิ้น 2 ชั่วโมง จากหมู่บ้านก้านมะยมไปยังหมู่บ้านไม้มะค่า ถ้ามหาว่าถ้านาย ก. พายเรือในน้ำนิ่งโดย ก. ใช้ความเร็วพายเท่ากับที่ใช้ในครั้งแรกที่ไปธุระที่หมู่บ้านไม้มะค่าได้ระยะทาง 9 กิโลเมตรแล้วเปลี่ยนให้ ข. ซึ่งใช้ความเร็วพายเท่ากับที่ใช้ในการไปธุระทั้ง 2 ครั้งพายเรือในระยะทาง 15 กิโลเมตร จะมีความเร็วเฉลี่ยในการพายทั้งหมดเท่าใด

19. จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของ  $|ab(a+b)|$  เมื่อ  $a^2 + b^2 \leq 2$

20. จงแก้สมการ  $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงและ  $a \neq 0$