

ข้อสอบ TUGMOs ครั้งที่ 4 รอบที่ 1

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 2 กรกฎาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>



ข้อสอบแข่งขันในโครงการสรรหานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์  
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ประจำปีการศึกษา 2549  
วิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น รอบที่ 1

**ส่วนที่ 1** เลือกคำตอบที่ต้องการให้ครบ (ถ้าไม่มีคำตอบที่ถูกต้องเลย ให้ตอบ จ.)

1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นกล่าวถูกต้องบ้าง

- ก. กำหนดให้  $x$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า ห.ร.ม. ของ  $x$  กับ 25 เป็น 5 และ ค.ร.น. ของ  $x$  กับ 25 เป็น 200 ค่า  $x$  ทั้งหมดที่ใช้ได้คือ 40
- ข. ถ้า  $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$  แล้ว  $x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 5\sqrt{7}$
- ค. ถ้า  $a$  เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่เป็น 0 และ  $b$  เป็นจำนวนอตรรกยะ จะได้ว่า  $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b}$  และ  $\frac{b}{a}$  เป็นจำนวนอตรรกยะทั้งหมด
- ง. ให้  $x, y, z, a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนบวก ถ้า  $xa = y, yb = z, zc = x$  จะได้ว่า  $abc = 1$
- จ. จำนวนจริงทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + x}} = x$  คือ  $x = 2$

2. ให้  $A, B, C, D, E$  เป็นจำนวนเต็มบวก ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อใดบ้างอาจเป็นจำนวนเต็มได้ เมื่อ กำหนดให้  $A, B, C, D, E$  ไม่มีสองจำนวนใดเท่ากันเลย

- ก.  $\frac{A}{B} + \frac{B}{A}$                       ข.  $\frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{A}$                       ค.  $\frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{D} + \frac{D}{A}$   
ง.  $\frac{A}{B} + \frac{B}{A} + \frac{C}{D} + \frac{D}{C}$                       จ.  $\frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{D} + \frac{D}{E} + \frac{E}{A}$

3. ในวันก่อนสอบ TUGMOs4 ปรากฏว่าอาหารว่างสำหรับผู้เข้าแข่งขันถูกขโมยไป หลังจากนั้น ได้พบผู้ต้องสงสัย 5 ราย ซึ่งเป็นเพื่อนกัน คือ เต็น บুম ชนุดม์ ดุสิต และเอิร์ท โดย 5 คนนี้จะพูดจริงเสมอ 3 คน และพูดเท็จเสมอ 2 คน ขโมยคือผู้พูดโกหก ใครเป็นขโมยบ้าง

- เต็น:            บুম พูดความจริง  
บุม:            เอิร์ท พูดโกหก  
ชนุดม์:        เต็น พูดโกหก  
ดุสิต:         ชนุดม์ พูดโกหก  
เอิร์ท:         ดุสิต พูดโกหก

- ก. เต็น                      ข. บุม                      ค. ชนุดม์                      ง. ดุสิต                      จ. เอิร์ท

4. ณ ห้องทองแห่งหนึ่ง ได้เกิดการปล้นทองไปจำนวนมหาศาล หลังจากนั้นตำรวจได้พบผู้ต้องสงสัย 5 คนซึ่งเป็นเพื่อนกัน คือ A, B, C, D, E ตำรวจพบว่า 5 คนนี้จะพูดจริง 3 คน และพูดเท็จ 2 คน หลังจากนั้น คนพูดจริงก็จะเปลี่ยนเป็นพูดเท็จในการถามครั้งที่ 2 เช่นเดียวกับ คนพูดเท็จที่จะเปลี่ยนไปพูดจริง ใน 5 คนนี้มีขโมย 1 คน ใครคือขโมย

การถามครั้งที่ 1

- A: B พูดความจริง
- B: E ไม่ได้ขโมย
- C: A ขโมย
- D: C พูดโกหก
- E: D พูดโกหก

การถามครั้งที่ 2

- A: C ขโมย
- B: E ขโมย
- C: A ไม่ได้ขโมย
- D: B ไม่ได้ขโมย
- E: D ไม่ได้ขโมย

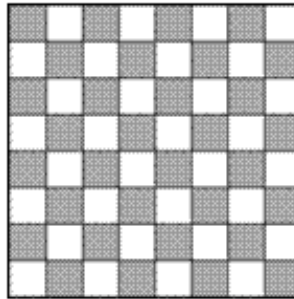
ก. A                      ข. B                      ค. C                      ง. D                      จ. E

5. กำหนดให้  $3 \leq x \leq 4$  และ  $5 \leq y \leq 8$  ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง

- ก.  $-5 \leq x - y \leq -1$
- ข.  $\frac{11}{8} \leq \frac{x+y}{y} \leq \frac{9}{5}$
- ค.  $10 \leq xy - 4y + 5x \leq 20$
- ง.  $-6.4 \leq (x - 6)(x - 1) \leq -6$
- จ.  $-16 \leq x^2 - xy \leq -4$

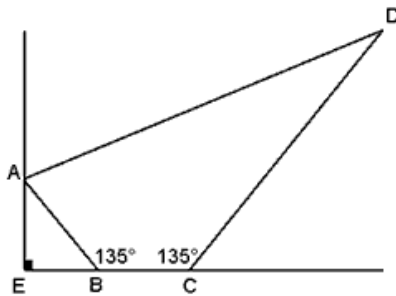
**ส่วนที่ 2** เติมคำตอบในช่องว่างที่กำหนดให้

- ให้ลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots$  กำหนดโดย  $a_1 = 321, a_2 = 335, a_3 = 229, a_4 = 934,$   
 $a_5 = 711, a_6 = 666$  และ  $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4} + a_{n-5} - a_{n-6}$  เมื่อ  
 $n > 6$  จงหาค่าของ  $a_{9011} + a_{2549}$
- จงหาผลบวกของจำนวน 2 หลักทั้งหมดซึ่งมีสมบัติว่า จำนวน 2 หลักนั้น หารด้วยเลขโดด  
 หลักสิบและเลขโดดหลักหน่วย ลงตัว
- บนกระดานหมากรุก  $8 \times 8$  (ดังรูป) นายเตชินท์ต้องการวางเรือ 7 ตัว โดยที่ไม่มีคูใดเลย  
 สามารถกินกันได้ และเรือทั้ง 7 ตัวอยู่บนช่องสีเดียวกัน ตารางไม่สามารถ พลิก หรือ หมุน  
 ได้ เตชินท์จะสามารถวางเรือได้กี่วิธี (เรือ 2 ตัวจะกินกันได้เมื่ออยู่ในแถวเดียวกันหรือหลัก  
 เดียวกัน)

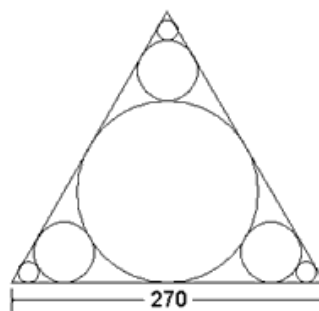


- ในสูตรสำหรับทำเค้กใบเตย 1 ชิ้น ต้องใช้แป้ง 4.25 ออนซ์ และน้ำใบเตย 7 ช้อนโต๊ะ ถ้า  
 ต้องการทำเค้กใบเตย 80 ชิ้น ต้องใช้เงินค่าแป้งและน้ำใบเตยเท่าไร ถ้าแป้งราคาปอนด์ละ  
 20 บาท น้ำใบเตยราคาขวดละ 50 บาท (1 ขวดมี 100 cc)
- นายไวท์กับนายแบล็ค นำเงินไปฝากธนาคารคนละ 30,000 บาท นายไวท์จะได้ดอกเบี้ยคง  
 ต้น อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี และเสียภาษีดอกเบี้ย 10% นายแบล็คจะได้ดอกเบี้ยทบต้น  
 รายปี อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี และเสียภาษีดอกเบี้ย 20% หลังจากทั้งคู่ฝากเงินเป็นเวลา  
 2 ปี นายไวท์และนายแบล็คมีเงินสุทธิ  $W$  และ  $B$  บาท ตามลำดับ จงหาจำนวนเต็มที่  
 ใกล้เคียง  $(W - B)$  ที่สุด
- ให้  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม โดยที่  $\overline{OA}, \overline{OB}$  เป็นรัศมีที่ตั้งฉากกัน  $\overline{CD}$  เป็นคอร์ดที่  
 ขนานกับ  $\overline{AB}$  และตัดกับ  $\overline{OA}, \overline{OB}$  ที่จุด  $E, F$  ตามลำดับ (เรียงลำดับจุดเป็น  $C, E, F, D$ )  
 ให้  $CE = \sqrt{56}, ED = 12$  จงหาความยาวรัศมีวงกลม
- ใน  $\triangle ABC$  วงกลมวงหนึ่งผ่าน  $B, C$  ตัด  $\overline{AB}, \overline{AC}$  ที่  $D, E$  ตามลำดับ ให้  $G$  เป็นจุดบน  
 $\overline{AC}$  ซึ่ง  $\overline{DG} \perp \overline{AC}$ ,  $F$  เป็นจุดบน  $\overline{AB}$  ซึ่ง  $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ ,  $I$  เป็นจุดบน  $\overline{AC}$  ซึ่ง  $\overline{FI} \perp \overline{AC}$ ,  
 $H$  เป็นจุดบน  $\overline{AB}$  ซึ่ง  $\overline{GH} \perp \overline{AB}$  ถ้า  $\left(\frac{AH \cdot AB}{AC \cdot AI}\right)^2 = \frac{a}{b}$  เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนนับ และ  
 ห.ร.ม. ของ  $a$  กับ  $b$  เป็น 1 จงหา  $a + b$

8. ให้  $A$  เป็นผลบวกคำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ  $(x - 3)(x + 4)(2x + 3) = 0$   
 ให้  $B$  เป็นจำนวนคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ  $\sqrt{8x - 1} + \sqrt{3x - 6} = x + 1$  ให้  
 $C$  เป็นจำนวนจุดตัดของกราฟ  $3x^2 + 13x + 14 = 0$  และ  $x^3 - 8x^2 + 2x + 6 = y$  จงหา  
 $(A + B) \cdot C$
9. ให้  $a_1 = 1$  และ  $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$  เมื่อ  $n > 0$  จงหาเลขสองหลักสุดท้ายของ  $a_{2549}$
10. ให้  $x$  เป็นปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุน  $\square ABCD$  รอบแนวเส้นตรง  $AE$  ดังรูป ถ้า  
 $AD = 13, AB = 2\sqrt{2}, BC = 3$  และ  $\frac{x}{\pi} = \frac{a}{b}$  เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนนับ และ ห.ร.ม. ของ  $a$   
 กับ  $b$  เป็น 1 จงหา  $a + b$

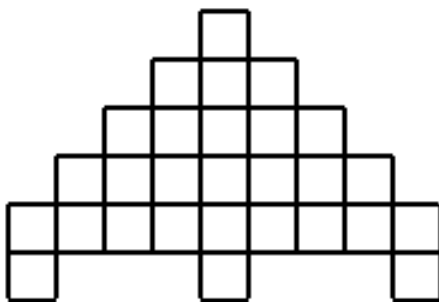


11. A, B, C, D ต้องการข้ามฟากแม่น้ำ เรือลำเดียวที่พวกเขาสามารถขึ้นได้ที่ละอย่างมาก  
 สองคน เมื่อขึ้นเรือเพียงคนเดียว A, B, C, D สามารถพายเรือได้โดยใช้เวลา 1, 2, 5, 10  
 นาที ตามลำดับ เมื่อสองคนขึ้นเรือพร้อมๆกัน เวลาที่ใช้จะเท่ากับเวลาของคนที่ช้ากว่า จง  
 หาว่า พวกเขาจะต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่นาทีเพื่อที่จะข้ามฟากได้ทั้งหมด
12. สามเหลี่ยมในรูปเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า ถ้าผลบวกพื้นที่วงกลมทั้งเจ็ดวงเป็น  $a \cdot \pi$  จงหา  
 $a$



13. นักเรียนห้องหนึ่งมีนักเรียนหญิงทั้งหมด 7 คน นักเรียนชาย  $m$  คน วันหนึ่งครูพาไปเก็บ  
 ส้ม โดยให้เก็บคนละเท่าๆ กัน พบว่าเก็บได้  $m^2 + 11m + 68$  ลูก ต่อมาพาไปเก็บชมพู่ โดย  
 คราวนี้มีนักเรียนหญิงห้องอื่นมาเพิ่มอีก 2 คน และให้เก็บคนละเท่าๆ กัน เมื่อนับจำนวน  
 ชมพู่กับส้มรวมกันได้  $3m^2 + 42m + 227$  ลูก ต่อมานักเรียนชายเป็นลมไป 4 คน แต่ครู  
 ต้องการให้นักเรียนชาย 3 คน ไปช่วยเก็บขยะ ถามว่าครูมีกี่วิธีที่จะเลือกนักเรียนชายไป  
 เก็บขยะ

14. คนงาน 5 คน ได้รับการจัดอันดับ 1 - 5 จากผู้สังเกตการณ์และจากเจ้านาย โดยคนงานที่ได้อันดับ  $m$  ในการจัดอันดับจากผู้สังเกตการณ์ และอันดับ  $n$  จากเจ้านาย จะได้เงินรางวัล  $(6 - m)5^{6-n}$  บาท ถ้าเงินรางวัลรวมทั้งสิ้น 7475 บาท จงหาว่าผู้ได้รับอันดับ 2 จากผู้สังเกตการณ์ ได้รับเงินรางวัลทั้งหมดกี่บาท
15. จงหาจำนวนสี่เหลี่ยมมุมฉากในรูป (สี่เหลี่ยมย่อยในรูปเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส)



16. กำหนดให้  $x, y, z$  เป็นจำนวนเต็มบวกหรือ 0 จงหาจำนวนคำตอบของสมการ

$$\sqrt[12]{x^6y^4z^3} + \frac{\sqrt{x^3} + y + \sqrt[4]{z^3} - 3}{x + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt{z} - \sqrt{x^3y^2} - \sqrt[12]{z^3y^4} - \sqrt[4]{x^2z}} + \sqrt[6]{x^3y^2} + \sqrt[12]{z^3y^4} + \sqrt[4]{x^2z} = 24$$

17. ให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= 5 \\ (a + b)(b + c)(c + a) &= -36 \\ abc &= -4 \end{aligned} \right\}$$

จงหาค่า  $ab + bc + ca$

18. จงหาพื้นที่ที่เกิดจากการปิดล้อมของกราฟ  $|3x - 90| + |y| = \left|\frac{3x}{2}\right|$
19. กำหนดจุด  $P$  ใน  $\triangle ABC$  ที่  $\angle ABC = 90^\circ$  และ  $\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ$  ถ้า  $PA = 10, PB = 6$  จงหา  $PC$
20. ให้  $x_1, x_2, \dots, x_7$  เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่  $x_6 = 144$  และ  $x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n)$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, 4$  จงหาผลบวกของค่า  $x_7$  ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
21. ให้  $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) = 20$  และ  $a + b + c = abc + 4$  จงหาค่า  $ab + bc + ca$  เมื่อกำหนดให้  $ab + bc + ca \geq 0$
22. ใน  $\triangle ABC$  ให้  $M$  เป็นจุดกึ่งกลางด้าน  $\overline{AB}$  และ  $N$  เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน  $\overline{AC}$  วงกลมแนบใน  $\square NMBC$  ซึ่งสัมผัสด้านทั้งสองของ  $\square NMBC$  สัมผัสด้าน  $\overline{MN}$  ที่จุด  $X$  วงกลมแนบใน  $\triangle AMN$  สัมผัสด้าน  $\overline{MN}$  ที่จุด  $Y$  โดยที่จุด  $Y$  อยู่ระหว่างจุด  $X$  และจุด  $N$  ถ้า  $XY = 1$  และ  $BC = 12$  จงหา  $AB^2 + AC^2$

23. จงหาจำนวนเต็ม  $n$  ที่มากที่สุดที่  $n!$  สามารถเขียนได้เป็นผลคูณของจำนวนเต็มที่ติดกัน  $n - 3$  จำนวน (ตัวอย่างเช่น  $6! = 10 \cdot 9 \cdot 8$ )

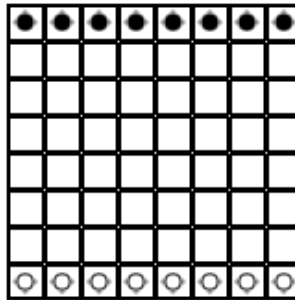
24. จำนวนจริง  $a, b, x, y$  สอดคล้องกับระบบสมการ

$$\left. \begin{aligned} ax + by &= 3 \\ ax^2 + by^2 &= 7 \\ ax^3 + by^3 &= 16 \\ ax^4 + by^4 &= 42 \end{aligned} \right\}$$

จงหา  $ax^5 + by^5$

25. จงหาจำนวนเต็มคู่ที่มากที่สุด ที่ไม่สามารถเขียนในรูปผลบวกของจำนวนประกอบคี่บวก 2 จำนวนได้

26. บนกระดานหมากรุก  $8 \times 8$  วาง bishop สีดำ 8 ตัวและสีขาว 8 ตัว ดังรูป ถ้า bishop สามารถเดินได้ในแนวทแยงเท่านั้น (ก็ช่องก็ได้) จะต้องมีการเดินอย่างน้อยกี่ครั้ง ตัวสีขาวจึงจะไปอยู่ด้านบนทั้งหมด และตัวสีดำจะไปอยู่ด้านล่างทั้งหมด



27. B และ S เล่นเกมกัน โดย B จับฉลากตัวเลข  $x$  ตัวหนึ่งจากกล่องที่มีจำนวนนับตั้งแต่ 1 จนถึง 99 (แต่ตัวเลขที่มีความน่าจะเป็นที่จะถูกหยิบเท่ากัน) B เริ่มเกมโดยบวกตัวเลข  $x$  ที่ได้ด้วย 2 หรือ 3 หลังจากนั้น S ก็ต้องบวกตัวเลขผลลัพธ์ของ B ด้วย 2 หรือ 3 ผลัดกันบวกผลลัพธ์ของฝ่ายตรงข้ามด้วย 2 หรือ 3 เช่นนี้ไปเรื่อยๆ คนที่ได้ผลลัพธ์เป็นเลข 3 หลักคนแรกจะเป็นฝ่ายแพ้ ถ้าความน่าจะเป็นที่ S จะชนะเป็น  $p$  จงหา  $99p$  (ทั้งสองคนเล่นอย่างสุดความสามารถ และไม่มีการโกง)

### ส่วนที่ 3 เต็มคำตอบในช่องว่างที่กำหนดให้

#### 1. ณ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ประเทศไทย พ.ศ.2549...

ก่อนการแข่งขัน TUGMOs4 จะเริ่มขึ้น ได้เกิดเรื่องที่เกิดขึ้นกับชายหนุ่มคนหนึ่งนาม A และอาการที่เกิดขึ้นก็คือ มีอาการแพ้เป็นนิจ และชอบมองออกไปนอกหน้าต่างบ่อยๆ ทำให้เพื่อนๆ ทุกคนรู้สึกสงสัยและคอยถามสาเหตุจาก A อยู่เสมอ แต่ก็ไม่มีใครได้รับคำตอบ

ด้วยความอยากรู้อยากเห็นของเพื่อนๆ พวกเขาจึงต้องการความช่วยเหลือจาก “นักสืบเต็ง” ซึ่งเป็นนักสืบเรื่องของชาวบ้านมือหนึ่งของระดับชั้น และเป็นผู้เชี่ยวชาญด้านรหัสวิทยา นักสืบเต็งได้ตามประวัติของนาย A อย่างลับๆ จนพบว่า นาย A กำลังแอบมีความสัมพันธ์อันลึกซึ้งกับนางสาว J ซึ่งเป็นเพื่อนห้องใกล้เคียง

เต็งได้ลองเจาะระบบคอมพิวเตอร์ของ A ทำให้เขาพบจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ที่ J ส่งมาให้ 2 ฉบับ ฉบับแรกเขียนถึงการย้ายบ้านเพื่อศึกษาต่อชั้นมัธยมปลาย และได้เขียนชื่อจังหวัดไว้ว่า

003 002 107 079 013 133 067

นักสืบเต็งทราบความหมายจากเนื้อความว่าเป็น BANGKOK

ส่วนอีกฉบับหนึ่งนั้น J ชวนไปเที่ยวห้างสรรพสินค้าแห่งใหม่ พร้อมรหัสว่า

136 135 306 305 277 157 052

ซึ่งเขาก็ทราบได้อีกว่า เป็นคำว่า PARAGON

และแล้ว ทันใดนั้น จดหมายอีกฉบับของ J ก็ถูกส่งมา คราวนี้เป็นเรื่องการชวนไปเที่ยวตอนปิดเทอม และได้บอกถึงสถานที่นัดพบว่าเป็นสถานที่ในโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา พร้อมรหัส

001 232 222 177 387 267 096 051 282 191

แต่ก่อนที่เต็งจะได้ถอดรหัส คุณแม่ที่แสนดีของเขาก็เรียกเขาไปนอนเสียก่อน ทำให้เต็งจำเป็นต้องส่งรหัสนี้มาให้ทีมงานออกข้อสอบ TUGMOs เพื่อให้ผู้เข้าแข่งขันช่วยกันแก้ คุณ ในฐานะที่จะก้าวมาเป็นจอมยุทธ์แห่ง TUGMOs จงใช้ความสามารถของคุณ ถอดรหัสข้อความ

001 232 222 177 387 267 096 051 282 191

พร้อมบอกวิธีการถอดรหัส เพื่อประโยชน์สุขของโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาต่อไป