

ข้อสอบ TUGMOs ครั้งที่ 4 รอบที่ 2

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 2 กรกฎาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>



ข้อสอบแข่งขันในโครงการสรรหานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ประจำปีการศึกษา 2549
วิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น รอบที่ 2

1. ข้อมูลเป็นจำนวนนับ 12 ตัว เรียงลำดับสูงไปต่ำ ให้ A เป็นกลุ่มข้อมูล 7 ตัวแรก และ B เป็นกลุ่มข้อมูล 5 ตัวหลัง ถ้าทราบข้อมูลต่อไปนี้

	A	B	รวม
\bar{x}	20	X	16.25
Med	20	13	17
Mode	19	15	Y

จงหา X, Y และชุดข้อมูลที่เป็นไปได้ทั้งหมด

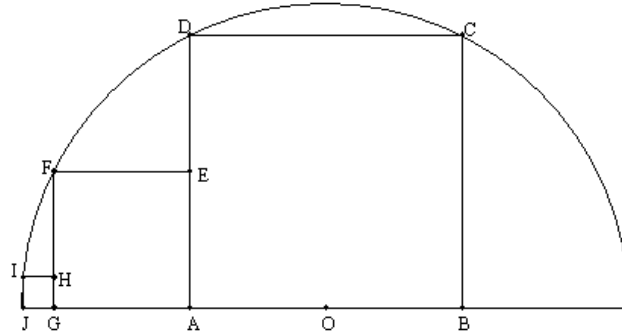
2. ต้องการจัดนักเรียน 9 คน ยืนเป็นแถวตรง จงหาว่าจะจัดได้กี่วิธีสำหรับแต่ละเงื่อนไขต่อไปนี้ (เงื่อนไขแต่ละข้อไม่ต่อเนื่องกัน)
- (i) นักเรียน 3 คนคือ A, B, C ไม่ต้องการยืนติดกันเลย
 - (ii) นักเรียน A ไม่ต้องการยืนติดกับนักเรียน B หรือ C
 - (iii) นักเรียน A ต้องการยืนติดกับนักเรียน B และ C
3. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้อง

$$\left. \begin{aligned} xy - x - y &= 27 \\ yz - y - z &= 34 \\ zx - z - x &= 19 \end{aligned} \right\}$$

จงหาค่าของ $x + y + z + xyz$

4. กำหนดให้ $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{2549 \times 2550} = k$
จงหาค่าของ $\frac{1275}{1276} + \frac{1276}{1277} + \frac{1277}{1278} + \dots + \frac{2548}{2549}$ ในรูปของ k
5. มีจำนวนเต็ม 5 ตัวแตกต่างกัน ถ้านำจำนวน 2 จำนวนที่แตกต่างกันใน 5 จำนวนนั้นมาบวกกัน ผลลัพธ์ที่ได้ได้แก่ 604, 379, 384, 585, 666, 465, 441, 580, 523, 609 จงหาจำนวนเต็มทั้ง 5 ตัวนั้น
6. จงหาผลบวกของเลขโดดของจำนวน $4 + 44 + 444 + \dots + 444 \dots 4$ (ตัวบวกตัวสุดท้ายมี 4 อยู่ 2006 หลัก)

7. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ให้ตัวหารแท้ของ n หมายถึงตัวหารบวกของ n ที่น้อยกว่า n มีจำนวนเต็มบวกที่จำนวนซึ่งมีตัวหารแท้ 3 ตัวพอดี และแต่ละตัวน้อยกว่า 50
8. จากรูป $\square ABCD, \square AEFG, \square GHIJ$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงหาค่าของ $\frac{[\square ABCD]^2}{[\square AEFG][\square GHIJ]}$ เมื่อ $[X]$ หมายถึงพื้นที่ของรูป X



9. ให้ a, b, c เป็นรากทั้งสามของสมการ $x^3 - 5x^2 - 8x + 4 = 0$ จงหาค่าของ $a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3$
10. สำหรับจำนวนเต็มบวก a ใดๆ เราจะกระทำการดังนี้
- ขั้นที่ 1** ให้ k เป็นเลขฐาน 10 ที่มีเลขโดดเหมือนกับ a ในฐาน 5 (เช่น ถ้า $a = 20 = (40)_5$ จะได้ $k = 40$)
- ขั้นที่ 2** นำ k มาหารด้วย 3 แล้วลบด้วย 5 ได้ผลลัพธ์เป็น m
- จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมด ที่เมื่อกระทำการดังกล่าวแล้วจะได้ $m = a$
11. วงกลม A รัศมี 6 หน่วย และวงกลม B รัศมี 8 หน่วย ตัดกันที่จุด P และ Q โดย \overline{AB} ยาว 12 หน่วย R เป็นจุดบนวงกลม A และ S เป็นจุดบนวงกลม B ซึ่ง R, P, S อยู่บนเส้นตรงเดียวกันและ $PR = PS$ จงหาความยาว PR
12. นาย A อายุ 15 ปี, นาย B อายุ $d \geq 15$ ปี อีก n ปีข้างหน้าอายุของทั้งสองคนจะเป็นเลขสองหลักที่สลับหลักกัน (เช่น 36 กับ 63) เมื่อ d และ n เป็นจำนวนเต็มบวก มีคู่อันดับ (d, n) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่คู่อันดับ
13. นายกะพงเป็นโค้ชของทีมอเมริกันฟุตบอลโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ทุกครั้งที่ทีมทำคะแนนได้เขาจะวิดพื้นเป็นจำนวนครั้งเท่ากับคะแนนของทีมในเวลานั้น ถ้าการทำคะแนนแต่ละครั้งจะเป็น 3 คะแนน หรือ 7 คะแนน เท่านั้น และกะพงวิดพื้นรวมทั้งหมด 71 ครั้ง จงหาคะแนนของทีมที่เป็นไปได้ทั้งหมด

14. ณ ดาว TUGMOs มีการใช้เวลาแบบพิเศษ คือ 1 วันมี 20 ชั่วโมง และ 1 ชั่วโมงมี 36 นาที นาฬิกาของดาวนี้มีเข็มบอกเวลา 2 เข็ม เข็มสั้นเดินทิศทวนเข็มนาฬิกาตามดาวโลก ครบ 1 รอบเป็น 1 วัน ส่วนเข็มายาวเดินตามเข็มนาฬิกาโลก ครบ 1 รอบเป็น 1 ชั่วโมง นาย ก เป็นชาวดาว TUGMOs เดินทางออกจากบ้านหลังเวลา 4 โมง แต่ก่อน 5 โมง เมื่อเขากลับถึงบ้านซึ่งเป็นเวลาหลัง 15 โมง แต่ก่อน 16 โมง เขาพบว่าเข็มนาฬิกาสลับที่กันพอดี จงหาว่านาย ก ออกจากบ้านกี่โมง

15. สำหรับจำนวนเต็ม a, b, c ใดๆ ให้ $f(a, b, c) = (a + b + c, ab + bc + ca, abc)$ จงหาคู่อันดับของจำนวนเต็ม (a, b, c) ทั้งหมดที่ $-2 \leq a \leq 2$ และ $f(f(a, b, c)) = (a, b, c)$

16. $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 6 หน่วย จุด F เป็นจุดบน \overline{DA} ที่ทำให้ \overline{FA} ยาว 4 หน่วย จุด E เป็นจุดบน \overline{AB} ที่ทำให้ \overline{AE} ยาว 3 หน่วย จุด P เป็นจุดใดๆ ใน $\square ABCD$ ที่ทำให้ผลรวมพื้นที่ของ $\triangle PFE, \triangle PEA, \triangle PFA$ เป็น 16 ตารางหน่วย ถ้าเส้นทางเดิน (Locus) ของ P ตัด \overline{DC} ที่จุด K และตัด \overline{CB} ที่จุด M จงหา KM

17. จงหาคำตอบ (x, y, z) ที่เป็นจำนวนจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมดของระบบสมการ

$$\left. \begin{aligned} xy &= z - x - y \\ xz &= y - z - x \\ yz &= x - y - z \end{aligned} \right\}$$

18. ใน $\triangle ABC$ มี $\angle B = 60^\circ$ ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม A ไปตัดกับเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากด้าน \overline{BC} ที่จุด D และตัดด้าน \overline{BC} ที่ F กำหนดให้ $AC = 3CD$ และ $CF = 8$ จงหาความยาว FD

19. จากผลบวกต่อไปนี้ (อักษรแต่ละตัวแทนเลขโดดที่ต่างกัน)

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \hline \end{array}$$

จงหาจำนวน “คนชม”

20. ใน $\triangle ABC$ มี $AB = 15, AC = 18, BC = 24$ ลากเส้นจากจุด C ลงมาตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุม A ที่ D ให้ X เป็นจุดบน \overline{BC} ซึ่ง $BX = XC$ จงหา DX

21. จงหา (a, b, c) ทั้งหมดซึ่ง a, b, c เป็นจำนวนนับ, $ac = b^2$ และ $a + b + c = 111$

22. วงกลม 3 วงต่างมีรัศมี เท่ากับ 3 หน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $P(22, 63), Q(25, 49), R(27, 56)$ ตามลำดับ กำหนด L เป็นเส้นตรงซึ่งลากผ่านจุด Q และแบ่งพื้นที่ทั้งหมดของวงกลมทั้งสามออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน จงหาค่าสัมบูรณ์ของความชันของเส้นตรง L

23. จงหาจำนวนเต็มที่มีมากที่สุดที่ไม่สามารถเขียนในรูป $42a + b$ โดย a, b เป็นจำนวนเต็มบวก และ b เป็นจำนวนประกอบ
24. ในชั่วโมงคณิตศาสตร์ อาจารย์สมชายเลือกนักเรียนมาจำนวนหนึ่ง (มากกว่า 1 คน) เพื่อมาเล่นเกม โดยมีกติกาดังนี้ ให้นักเรียนนั่งเรียงเป็นวงกลม และอาจารย์สมชายจะเดินรอบวงกลมในทิศตามเข็มนาฬิกา โดยเริ่มที่นักเรียน A เมื่ออาจารย์สมชายเดินผ่านนักเรียนแต่ละคน จะบอกคำสั่งว่า “รอด” หรือ “ตาย” ให้กับนักเรียนคนนั้น และคนที่ได้รับคำสั่ง “ตาย” ต้องออกจากวงทันที อาจารย์สมชายจะบอกคำสั่งด้วยรูปแบบ รอด, ตาย, ตาย, รอด, ตาย, ตาย, ... วนไปเรื่อยๆ จนเหลือนักเรียนคนเดียว นักเรียนคนนั้นจะเป็นผู้ชนะ ปรากฏว่าผู้ชนะคือ นักเรียนที่นั่งด้านขวา A ถ้านักเรียนในห้องมี 1000 คน จงหาว่าจำนวนนักเรียนที่อาจารย์สมชายเลือก เป็นเท่าไรได้บ้าง
25. จงหา (a, b, c) ทั้งหมด ที่ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก, $a \geq b$ และ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}$ เป็นจำนวนเต็ม
26. ดาราเกาหลี 3000 คนเข้าแถวเป็นแนวตรงเพื่อเซ็นลายเซ็น โดยเริ่มที่คนที่ 1 เซ็นก่อน แล้วส่งกระดาษต่อไปยังคนถัดไปเรื่อยๆ (เวลาที่ใช้ช่วงส่งกระดาษเป็น 0) คนที่ 1 ใช้เวลา 1 วินาทีในการเซ็น สำหรับ n เป็นจำนวนนับใดๆ คนที่ $2n$ กับคนที่ n จะใช้เวลาเซ็นเท่ากัน และคนที่ $2n + 1$ จะใช้เวลามากกว่าคนที่ $2n$ อยู่ 1 วินาที คนที่ 2549 จะใช้เวลาเซ็นกี่นาที และคนแรกที่ใช้เวลา 9 วินาที คือคนที่เท่าใด
27. บันไดมีทั้งหมด 13 ขั้น สมจิตต์ต้องการเดินขึ้นบันไดทีละ 1 หรือ 3 ขั้น เขาจะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี