

ข้อสอบ TUGMOs ครั้งที่ 5 รอบที่ 2
สอบวันที่ 3 ธันวาคม 2550

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 25 มกราคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 นักเรียนในโครงการพัฒนาศักยภาพนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
ทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญา Creative Commons Attribution-Noncommercial-
Share Alike 3.0

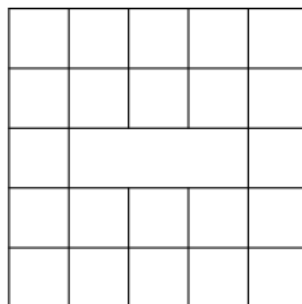
ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>



ข้อสอบแข่งขันในโครงการสรรหานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ประจำปีการศึกษา 2550
วิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น รอบที่ 2
สอบวันจันทร์ที่ 3 ธันวาคม 2550 เวลา 09.00-11.40 น.

NEED FOR SPEED QUIZ

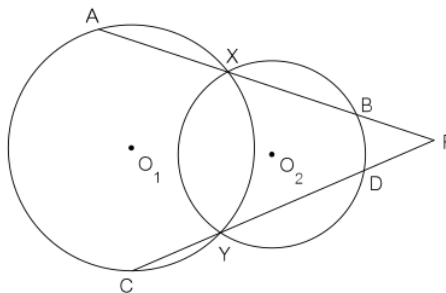
1. ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะบวกที่ทำให้ $p + q$ และ $p + 7q$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ทั้งคู่ จงหาค่าของ pq ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
2. ให้ P และ Q เป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกัน ทั้ง P และ Q ต่างก็มีตัวประกอบที่เป็นจำนวนเต็มบวก 6 ตัว และมี 851 เป็นตัวประกอบ จงหาค่าของ $|P-Q|$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
3. กำหนดให้ a, b และ c เป็นรากของสมการ $3x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = 0$ จงหาค่าของ $a^4 + b^4 + c^4$
4. กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $2x + 3y + z = 13$ และ $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 2x + 15y + 3z = 82$ จงหาค่าของ $xy + yz + zx$
5. กำหนดสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ยาวด้านละ 2 หน่วย
 O_1 เป็นครึ่งวงกลมที่มี CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางและอยู่ภายในสี่เหลี่ยม $ABCD$
 O_2 เป็นวงกลมที่สัมผัสด้าน AB, AD และสัมผัสครึ่งวงกลม O_1
จงหาความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O_2
6. ทรงกรวยกลวงตรงอันหนึ่งถูกตัดแบ่งในแนวขนานกับฐานวงกลม ทำให้สองส่วนใหม่มีความจุเท่ากัน จงหาว่าส่วนที่มีพื้นที่ผิวมากกว่ามีพื้นที่ผิวเป็นกี่เท่าของส่วนที่มีพื้นที่ผิวน้อยกว่า (พิจารณาเฉพาะพื้นที่ผิวภายนอก)
7. นายเบนซ์กำลังฝึกซ้อมบาสเกตบอล โดยการยิงลูกในระยะเวลาไถ่ลง 1 ครั้ง จะได้ 2 คะแนน และการยิงลูกในระยะเวลาไถ่ลง 1 ครั้ง จะได้ 3 คะแนน ถ้าเขายิงลูกลงอย่างต่อเนื่อง จงหาว่ามีกี่วิธีที่เขาจะสามารถทำคะแนนได้ 24 คะแนน (ลำดับมีความสำคัญ)
8. จากรูป มีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่รูป (สี่เหลี่ยมย่อยในรูปเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส)



BALANCE QUIZ

1. ท่อน้ำ AB มีความยาว 100 เซนติเมตร มีมดตัวหนึ่งยืนอยู่กึ่งกลางท่อ ในเวลาเริ่มต้นน้ำไหลเข้าท่อจากด้านปลายทั้งสองข้างด้วยอัตราเร็ว 5 เซนติเมตรต่อวินาที ในขณะที่เดียวกันมดก็เริ่มเดินไปทางปลายท่อด้าน B ด้วยอัตราเร็ว 4 เซนติเมตรต่อวินาที เมื่อไรก็ตามที่มดเดินไปเจอหน้า มันจะหันหลังกลับแล้วเดินไปทางปลายท่ออีกด้านโดยมีอัตราเร็ว 4 เซนติเมตรต่อวินาทีเท่าเดิม ถ้าคิดว่าเวลามดไม่เสียเวลาในการหันหลังกลับเลย จงหาว่ามันจะเดินได้ระยะทางกี่เซนติเมตร ก่อนที่จะถูกน้ำท่วมตาย
2. ให้ x เป็นจำนวนซึ่งสอดคล้องกับ $x - \frac{1}{4-x} = 0$ จงหาค่าของ $x^6 + (4-x)^6$
3. จากรูป วงกลม O_1 ตัดกับวงกลม O_2 ที่จุด X และจุด Y ให้จุด A, C อยู่บนวงกลม O_1 และจุด B, D อยู่บนวงกลม O_2 ดังรูป โดยที่จุด A, X, B อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และจุด C, Y, D ก็อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ต่อ AB ไปตัดกับ CD ที่จุด P กำหนด $PB = 21$ หน่วย, $PA = 56$ หน่วย และ $CD = 45$ หน่วย

จงหาความยาว PD



4. ในการแข่งขันฟุตบอลรอบ 8 ทีมสุดท้าย มีสโมสรฟุตบอลจากประเทศอังกฤษที่เข้ารอบมา 4 ทีม ถ้าการแข่งขันในรอบ 8 ทีมสุดท้าย จะแข่งขันกันเป็นคู่ๆ โดยการจับสลาก จงหาความน่าจะเป็นที่สโมสรฟุตบอลจากประเทศอังกฤษจะไม่แข่งขันกันเอง
5. นาฬิกาเรือนหนึ่ง เกิดความผิดพลาดในกลไก ทำให้เข็มวินาทีหมุนไม่ครบ 60 ช่องใน 1 นาที แต่เข็มนาทีและชั่วโมงเดินตรงตามเวลาจริง ณ เวลา 12.00 น. เข็มทั้งสามซ้อนทับกันสนิท แต่ก่อนเวลา 12.30 น. มีเวลาหนึ่งที่เข็มทั้งสามทำมุมเท่ากันซึ่งกันและกัน จงหาว่าเข็มวินาทีเดินคลาดเคลื่อนกี่ช่องใน 1 นาที ให้ตอบค่าที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้
6. กำหนดสมการ $2^{2x-1} - k + \frac{1}{2} = 3k \cdot 2^{x-2}$ เมื่อ x, k เป็นจำนวนจริง จงหาผลรวมของค่าคงที่ k ทั้งหมด ที่ทำให้สมการมีรากเดียว
7. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีพื้นที่ 64 ตารางหน่วย พิจารณารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีจุดยอด 2 จุด อยู่บนด้านด้านหนึ่งของสามเหลี่ยม และอีก 2 จุด อยู่บนด้านอีก 2 ด้านที่เหลือของสามเหลี่ยมด้านละจุด จงหาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังกล่าว จะมีพื้นที่มากที่สุดเท่าไร

8. โต๊ะสนุกเกอร์มีหลุมอยู่ 6 หลุมรอบโต๊ะ บนโต๊ะมีลูกสนุกเกอร์สีเหลือง สีเขียว สีน้ำตาล สีน้ำเงิน สีชมพู และสีดำ อย่างละ 1 ลูก กำหนดให้แทงลูกเหล่านี้ลงหลุมที่ลูกตามลำดับ ปรากฏว่าลูกลงหลุมทุกลูก และความน่าจะเป็นที่ลูกจะลงแต่ละหลุมมีเท่าๆ กัน ความน่าจะเป็นที่จะแทงลูกลงหลุมมุมบนขวาอย่างน้อย 3 ลูก โดยมีลูกสีเหลืองอยู่ด้วย เป็นเท่าไร

TUGMOs THE CHAMPION

1. เลขคณิต 80 คะแนน

A, B และ C วิ่งแข่งกันในสนามรูปวงกลมแห่งหนึ่ง 3 รอบ ในรอบแรก A ต่อให้ B วิ่งไปก่อน 40 เมตร และต่อให้ C วิ่งไปก่อน 4 วินาที ปรากฏว่าทั้ง 3 คน วิ่งครบรอบพร้อมกันพอดี ในรอบที่สอง B วิ่งเร็วกว่าในรอบแรก 20% และ C วิ่งเร็วกว่าในรอบแรก 25% ทำให้ทั้ง 3 คนวิ่งครบรอบพร้อมกันอีกครั้ง ในรอบสุดท้าย A, B และ C วิ่งได้ 80%, 80% และ 90% ของความเร็วในรอบแรก ถามว่า เมื่อคนที่ถึงเส้นชัยคนแรกถึงเส้นชัย ระยะทางที่ห่างจากเส้นชัยของอีก 2 คนที่เหลือ รวมกันได้กี่เมตร

2. เลขคณิต 100 คะแนน

ณ สนามหญ้าที่กว้างใหญ่แห่งหนึ่ง นายป๊อบนำวัวของเขาไปผูกไว้กับกำแพงกลางสนาม กำหนดว่ากำแพงมีความยาวน้อยกว่าเชือกที่ใช้ผูก เมื่อเวลาผ่านไป นายป๊อบกลับมาดูพบว่า วัวของเขาได้กินหญ้าไปได้มากที่สุดเท่าที่มันจะกินได้ คือ $\frac{211\pi}{2}$ ตารางหน่วย ถ้าเชือกมีความยาวเป็นจำนวนนับ และจุดที่ผูกเชือกแบ่งความยาวกำแพงออกเป็นจำนวนนับทั้งคู่ จงหาว่ากำแพงถูกแบ่งเป็นอัตราส่วนเท่าไร (ตอบแบบ สั้น : ยาว)

3. เลขคณิต 130 คะแนน

สุดหล่อสามารถทำงาน A เสร็จใน 18 วัน, งาน B เสร็จใน 19 วัน และงาน C เสร็จใน 24 วัน แสนดีสามารถทำงาน A เสร็จใน 21 วัน, งาน B เสร็จใน 21 วัน และงาน C เสร็จใน 27 วัน มีคนจ้างให้สุดหล่อและแสนดีร่วมมือกันทำโครงการ X ที่ประกอบด้วยงาน A 1 ชิ้น และงาน C 1 ชิ้น หลังจากทำเสร็จแล้ว ก็มีคนจ้างให้ทั้งสองคนทำโครงการ Y ที่ประกอบด้วยงาน B 1 ชิ้น และงาน C 1 ชิ้น ถ้าทั้ง 2 คน สามารถทำโครงการ X และ Y ให้เสร็จโดยใช้เวลาน้อยที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ แล้วทั้ง 2 คนใช้เวลาทำโครงการ Y นานกว่าโครงการ X กี่วัน (ตอบในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ)

4. พีชคณิต 80 คะแนน

ให้ x และ y สอดคล้องกับ $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $\frac{x^4+3x^3y-2x^2y^2+3x^3+y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$

5. พีชคณิต 100 คะแนน

จงหาสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ x^{48} ในพหุนาม $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)\dots(x+50)$

6. พีชคณิต 130 คะแนน

ให้ $f(n)$ เป็นพหุนามในรูป $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับหรือ 0 และ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริง

กำหนด $\sum_p^q f(x) = f(p) + f(p+1) + f(p+2) + \dots + f(q)$ โดยที่ $p \leq q$

$$\text{ถ้า } \sum_4^7 f(x) = 62, \sum_9^{12} f(x) = 122, \sum_{13}^{17} f(x) = 220$$

และค่าของ $\sum_1^{20} f(x)$ มีเพียงค่าเดียวที่เป็นไปได้

จงหาค่าของ $f(100)$

7. เรขาคณิต 80 คะแนน

แผนที่ของดาว TUGMOs สามารถวาดบนระบบพิกัดสองมิติได้ บ้านของน้องแป้งอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และโรงเรียนอยู่ที่จุด $(3, 3)$ น้องแป้งต้องการเดินทางจากบ้าน ไปที่จุดใดๆ บนถนนที่แทนด้วยเส้นตรง $y = 2$ จากนั้น ไปยังจุดใดๆ บนแม่น้ำที่แทนด้วยเส้นตรง $y = 1$ จากนั้น จึงไปโรงเรียน น้องแป้งจะต้องเดินทางสั้นที่สุดกี่หน่วย

8. เรขาคณิต 100 คะแนน

ให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูที่มี $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ กำหนด $AB : CD = 2 : 3$ ให้ P และ Q เป็นจุดบนด้าน \overline{AD} และ \overline{BC} ตามลำดับ โดยที่ $AP : PD = 1 : 3$ และ $BQ : QC = 3 : 1$ จงหาอัตราส่วนของพื้นที่ $\square ABQP$ ต่อพื้นที่ $\square CDPQ$

9. เรขาคณิต 130 คะแนน

จากจุด $(1, 1)$ ลากเส้นตรงที่แตกต่างกัน 2 เส้น ไปสัมผัสเส้นกราฟ $y = x^2 + x + 3$ จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากจุด $(1, 1)$ และจุดสัมผัสทั้งสอง (ตอบเป็นตารางหน่วย)

10. การนับและความน่าจะเป็น 80 คะแนน

เกมโชว์รายการ “แผ่นป้ายมหัศจรรย์บรรลัยกัลป์” มีแผ่นป้าย 10 แผ่น ซึ่งจะมีแผ่นป้ายรูปม้า 3 แผ่นอยู่ในนั้น ให้ผู้เข้าแข่งขันเลือกแผ่นป้ายได้ 4 แผ่น ถ้าเลือกได้แผ่นป้ายรูปม้าอย่างน้อย 2 แผ่น จะได้รับรางวัลพิเศษ จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าแข่งขันจะได้รับรางวัลพิเศษ

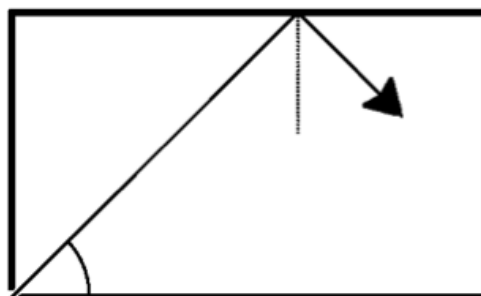
11. การนับและความน่าจะเป็น 100 คะแนน

จากรูปเป็นกระดานตะปูรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงหาจำนวนสามเหลี่ยมมุมฉากที่เกิดจากการเชื่อมจุด 3 จุดใดๆ ในรูป และมีพื้นที่เท่ากับ 3 ตารางหน่วย (รูปที่เกิดจากการสะท้อน การหมุน หรือการเลื่อนขนานของอีกรูปหนึ่ง ถือว่าเป็นรูปใหม่และไม่ซ้ำกับรูปเดิม)



12. การนับและความน่าจะเป็น 130 คะแนน

กำหนดตารางขนาด 2007×2550 ช่อง นำกระจกเงาที่มีความยาว 2007 ช่องตารางมา 2 บาน และความยาว 2550 ช่องตารางมา 2 บาน มาวางเป็นกรอบของตารางดังกล่าว เจาะรูเล็กๆ ที่มุมหนึ่งของกรอบ และฉายแสงในทิศทำมุม 45 องศากับกระจกเงา แสงจะเดินทางเป็นเส้นตรง และสะท้อนตามกฎของสเนลล์ (ขนาดของมุมตกกระทบเท่ากับขนาดของมุมสะท้อน) ถ้าให้ A แทนจำนวนช่องตารางที่แสงนี้ผ่านก่อนออกจากตาราง จงหาค่าของ $\sqrt{A - (3)(11)(171)(223)}$



13. คำถามสำรอง 1

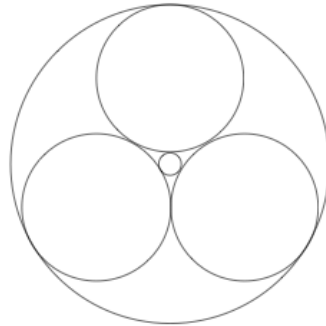
ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $2x - 5$ หาร $x^2 + 2x + 9$ ลงตัว เมื่อนำผลรวมของค่า x ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมาหารด้วย 10 จะเหลือเศษเท่าใด

14. คำถามสำรอง 2

กล่องใบหนึ่งมีฉลากหมายเลข 1 ถึง 10 สุ่มหยิบฉลากมา 4 ใบพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ฉลากหมายเลขน้อยกว่า 4 สองใบ และหมายเลขมากกว่า 6 หนึ่งใบ เป็นเท่าไร

15. คำถามสำรอง 3

กำหนดวงกลม O มา 1 วง วาดวงกลม 3 วง ที่มีขนาดเท่ากันลงไปในวงกลม O โดยให้แต่ละวงสัมผัสกับวงกลม O แบบภายใน และสัมผัสกันเองภายนอก วาดวงกลม P ให้สัมผัสภายนอกกับทั้ง 3 วงกลม ดังรูป จงหาว่าพื้นที่ที่วงกลม O เป็นที่เท่าของพื้นที่ที่วงกลม P



16. คำถามสำรอง 4

จากรูปเป็นกระดานตะปูรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จงหาจำนวนส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดบนกระดาน และผ่านจุดอย่างน้อย 3 จุด

