ข้อสอบ TUGMOs ครั้งที่ 6 รอบที่ 1

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 12 เมษายน 2552

โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
โครงการสรรหานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ครั้งที่ 6
ข้อสอบรอบที่ 1 (ประเภทบุคคล)
เวลาสอบ 09.00 น. - 12.00 น.

คำชี้แจงในการสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 30 ข้อ โดยแบ่งออกเป็น

ตอนที่ 1 ข้อ 1-10	เลือกคำตอบ	ข้อละ 2 คะแนน	**รวม 20 คะแนน**
ตอนที่ 2 ข้อ 11-20	เติมคำตอบ	ข้อละ 3.5 คะแนน	**รวม 35 คะแนน**
ตอนที่ 3 ข้อ 21-30	เติมคำตอบ	ข้อละ 4.5 คะแนน	**รวม 45 คะแนน**
			รวมทั้งหมด 100 คะแนน

2. ให้เวลาในการสอบตั้งแต่ 9.00 น. - 12.00 น. รวม 3 ชั่วโมง
3. ในการตอบข้อสอบแบบเติมคำตอบ ต้องตอบให้อยู่ในรูปที่ง่ายที่สุดเท่านั้น
4. ในการตอบข้อสอบแบบเติมคำตอบ ถ้าข้อใดในคำตอบมีจำนวนอตรรกยะ เช่น $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ ต้องตอบให้ติดอยู่ในรูปของจำนวนนั้น ห้ามใช้ค่าประมาณ
5. ในการตอบข้อสอบแบบเติมคำตอบ จะใส่หน่วยหรือไม่ใส่ก็ได้
6. นักเรียนสามารถทดลงในข้อสอบฉบับนี้ได้ และนักเรียนจะได้รับกระดาษทดคนละ 2 แผ่น หากไม่พอสามารถขอเพิ่มจากกรรมการคุมสอบได้
7. หลังจากสอบนักเรียนสามารถนำข้อสอบฉบับนี้กลับไปได้
8. หากมีข้อสงสัยใดๆ ให้ยกมือขึ้นเหนือศีรษะเพื่อสอบถามจากกรรมการคุมสอบ

ตอนที่ 1 (ข้อ 1-10) กากบาทตัวเลือกที่ถูกต้องลงในกระดาษคำตอบ (ข้อละ 2 คะแนน)

1. กำหนดให้ $x \oplus y = \frac{3x+5y}{4+3xy}$ สำหรับทุกจำนวนจริง x, y
   จงหาค่า a ที่ทำให้ $4 \oplus a = \frac{1}{2}$

   ก. 10 ข. 12 ค. 14 ง. 16

2. ให้ α และ β เป็นรากของสมการ $x^2 - 7x + 10 = 0$ จงหาค่าของ $\alpha^5 + \beta^5$

   ก. 1357 ข. 1573 ค. 3157 ง. 3571

3. มิองเริ่มออกเดินจากจุดเริ่มต้น โดยจะเดินไป ก้าว แล้วเลี้ยว แล้วเดินต่ออีก ก้าว แล้วเลี้ยว สลับกันไปเรื่อยๆ โดยทิศทางของการเลี้ยวในแต่ละครั้งจะเป็นลำดับดังนี้
   ขวา, ขวา, ซ้าย, ขวา, ขวา, ซ้าย, ขวา, ขวา, ซ้าย, . . .
   ถ้าการเดินของมิองมีความยาวก้าวละ 2 ฟุต จงหาว่าเมื่อเดินไป 2008 ก้าว มิองจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่ฟุต

   ก. 2 ฟุต ข. $2\sqrt{2}$ ฟุต ค. 4 ฟุต ง. $2\sqrt{5}$ ฟุต

4. มีชุดอันดับ (a, b, c, d) อยู่ทั้งหมดกี่ชุด ที่ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน 12 และ $a + 2b + 3c + 4d$ หารด้วย 12 ลงตัว

   ก. 648 ชุด ข. 960 ชุด ค. 1320 ชุด ง. 1728 ชุด

5.

	T	U	G	M	O	S	
		T	R	I	A	M	+
			U	D	O	M	
1	1	1	2	3	7	7	

   ถ้าอักษรแต่ละตัวแทนเลขโดด 0-9 ที่แตกต่างกัน จะมีชุดคำตอบที่สอดคล้องกับผลบวกดังกล่าวทั้งหมดกี่ชุด

   ก. 4 ชุด ข. 8 ชุด ค. 12 ชุด ง. 16 ชุด

6. ABC เป็นสามเหลี่ยม ให้ H เป็นจุดบนด้าน BC ที่ทำให้ AH ตั้งฉากกับ BC
   ถ้า $AH = 15, BH = 3$ และ $CH = 10$ จงหาขนาดของมุม $B\hat{A}C$

   ก. 18° ข. 30° ค. 36° ง. 45°

7. จงหาเศษเหลือจากการหาร $16^{16^1} + 16^{16^2} + 16^{16^3} + \ldots + 16^{16^{2551}}$ ด้วย 13

   ก. 2 ข. 3 ค. 8 ง. 9

8. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ $AB = 9$ และ $AC = 7$ ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC
ให้ X เป็นจุดบนด้าน AB ซึ่ง DX ตั้งฉากกับ AB
ให้ Y เป็นจุดบนด้าน AC ซึ่ง DY ตั้งฉากกับ AC
ถ้า $AX = 6$ จงหาความยาวของ AY

   ก. $\frac{34}{7}$ ข. $\frac{36}{7}$ ค. $\frac{38}{7}$ ง. $\frac{40}{7}$

9. มีอะมีบาอยู่ 4 สี คือสีแดง สีเขียว สีเหลือง และสีน้ำเงิน เมื่ออะมีบาสองตัวที่มีสีแตกต่างกันมาเจอกัน อะมีบาทั้งสองจะรวมตัวกันกลายเป็นอะมีบาตัวเดียว โดยอะมีบาตัวใหม่ที่เกิดขึ้นจะมีสีตามเงื่อนไขต่อไปนี้

   - อะมีบาสีแดงรวมตัวกับสีเขียวจะกลายเป็นสีน้ำเงิน
   - อะมีบาสีแดงรวมตัวกับสีเหลืองจะกลายเป็นสีแดง
   - อะมีบาสีแดงรวมตัวกับสีน้ำเงินจะกลายเป็นสีเหลือง
   - อะมีบาสีเขียวรวมตัวกับสีเหลืองจะกลายเป็นสีเขียว
   - อะมีบาสีเขียวรวมตัวกับสีน้ำเงินจะกลายเป็นสีแดง
   - อะมีบาสีเหลืองรวมตัวกับสีน้ำเงินจะกลายเป็นสีน้ำเงิน

   ในตอนแรกมีอะมีบาสีแดง สีเขียว สีเหลือง และสีน้ำเงิน อยู่จำนวน 96, 97, 98 และ 99 ตัว ตามลำดับ ถ้าอะมีบารวมตัวกันไปเรื่อยๆ จนในที่สุดเหลืออยู่เพียงตัวเดียว จงหาว่าอะมีบาตัวสุดท้ายมีสีอะไร

   ก. สีแดง ข. สีเขียว ค. สีเหลือง ง. สีน้ำเงิน

10. กำหนด $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ ถ้าทราบว่า $7.4854 < H_{1000} < 7.4855$
จงหาจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าน้อยกว่า $H_1 + H_2 + H_3 + \ldots + H_{1000}$

   ก. 6490 ข. 6492 ค. 6494 ง. 6496

ตอนที่ 2 (ข้อ 11-20) เติมคำตอบลงในกระดาษคำตอบ (ข้อละ 3.5 คะแนน)

11. จงหาชุดของจำนวนเฉพาะ p, q, r, s ทั้งหมดที่ $p \geq q \geq r \geq s$ และ
$pqrs = p + q + r + s + 1834$

12. ให้ $a > b > c > d > 0$ เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ
$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = \frac{13}{2}$ และ $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b} = 9$
จงหาค่าของ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

13. **ช้าง** เป็นหมากตัวหนึ่งในหมากรุกเกาหลี มีวิธีการกินหมากตัวอื่นดังนี้

- เดินในแนวตรง 3 ช่อง แล้วเลี้ยวซ้ายหรือเลี้ยวขวา แล้วเดินไปอีก 2 ช่อง

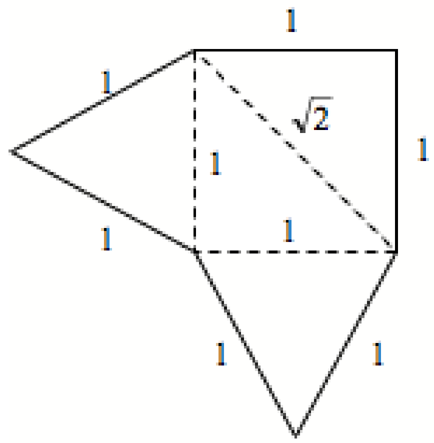
ตัวอย่างเช่นในภาพ ช้างที่อยู่ในช่อง $\oplus$ สามารถกินหมากที่อยู่ในช่องที่มีเครื่องหมาย X ได้

	×				×		
×						×	
			$\oplus$				
×						×	
	×				×		

จงหาว่า เราสามารถวาง **ช้าง** บนกระดานขนาด 6×6 ได้อย่างมากกี่ตัว โดยที่ไม่มีช้างสองตัวใดๆ ที่กินกันได้

14. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $(2a+b)^2 + \left(a + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$
จงหาค่าของ $(2b+a)^2 + \left(b + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(a + \frac{4}{3}\right)^2$

15. จงหาปริมาตรของรูปทรงที่เกิดขึ้นจากการพับกระดาษในรูปตามแนวเส้นประ โดยตัวเลขที่กำกับอยู่ในรูป หมายถึงความยาวของแต่ละด้าน



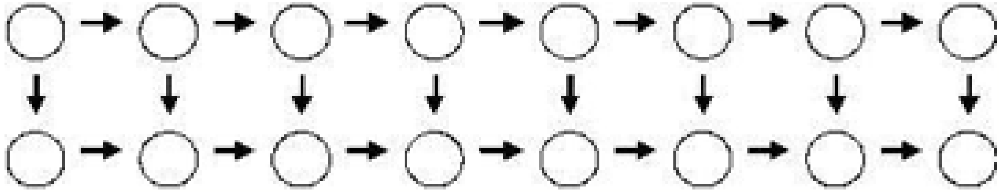
16. จงหาเศษเหลือจากการหาร $1053^3 + 392^3 + 378^3$ ด้วย 2579

17. ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า ให้ P เป็นจุดที่อยู่บนด้าน AC โดยที่ $P\hat{B}C = 23^\circ$ ต่อรังสี BP ไปจนถึงจุด Q โดยที่ $P\hat{C}Q = 67^\circ$ จงหาขนาดของมุม $A\hat{Q}P$

18. ไมและซายูริเล่นเกมกัน โดยทั้งคู่ผลัดกันเขียนจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่าอยู่ในช่วงตั้งแต่ 1 ถึง 9 ลงบนกระดาน ซึ่งไมเป็นฝ่ายเริ่มก่อน ใครที่เขียนจำนวนลงไปแล้วทำให้ผลบวกของกำลังสองของทุกจำนวนบนกระดานมีค่าเกิน k จะเป็นฝ่ายแพ้
ถ้า k เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 2008$ จงหาค่า k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ซายูริเป็นฝ่ายชนะเมื่อทั้งสองฝ่ายต่างเล่นด้วยแผนการที่ดีที่สุด

19. จงหาคู่อันดับของจำนวนนับ (n, k) ทั้งหมดที่ทำให้ $\frac{2(kn-1)}{n+1}$ และ $\frac{6kn-1}{2k-1}$ เป็นจำนวนเต็มทั้งสองจำนวน

20. สามารถใส่เลข 1-16 ลงในช่องที่อยู่ในภาพได้ทั้งหมดกี่วิธี โดยเลขในแต่ละช่องจะต้องไม่ซ้ำกัน และเลขในช่องที่ท้ายลูกศรจะต้องมีค่ามากกว่าเลขในช่องที่หัวลูกศร



ตอนที่ 3 (ข้อ 21-30) เติมคำตอบลงในกระดาษคำตอบ (ข้อละ 4.5 คะแนน)

21. ให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมที่ $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{13}$, $CD = \sqrt{17}$, $DA = \sqrt{29}$ และ $AC = \sqrt{10}$
จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยม $ABCD$

22. มีจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดกี่จำนวน ที่ $1 \leq n \leq 1,000,000$ และ n^n หารด้วย n^2+1 เหลือเศษเป็นกำลังสองสมบูรณ์

23. ให้ $A = \frac{1}{\sqrt[3]{1{,}000}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1{,}001}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1{,}002}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{1{,}000{,}000}}$
จงหาจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าน้อยกว่า $\frac{A}{4}$

24. ให้ x, y เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $\frac{xy}{x+y} > 7$
จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ $\frac{xy}{x+y}$

25. เกมคอมพิวเตอร์เกมหนึ่งมีกติกาคือ

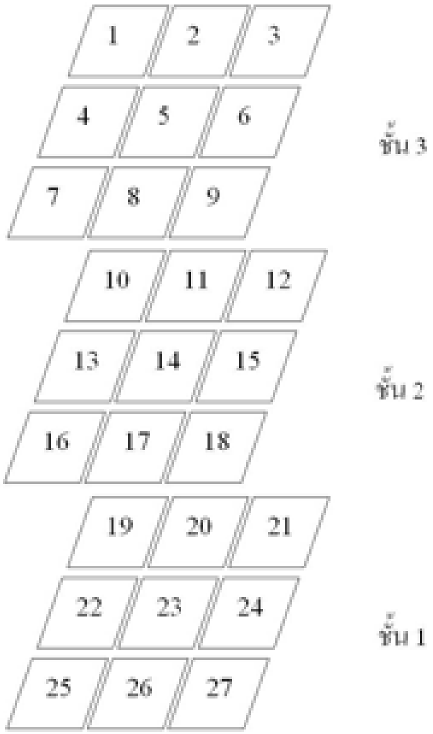
- มีตารางขนาด 4×4 และมีหมากสีแดง สีเหลือง สีเขียว และสีน้ำเงินอยู่สีละ 4 ตัว
- ผู้เล่นจะต้องนำหมากทั้งหมดไปวางในตาราง โดยวางช่องละ 1 ตัว
- ผู้เล่นจะได้คะแนนเท่ากับจำนวนของแถวหรือหลักที่มีหมากครบทั้ง 4 สี สีละ 1 ตัว

ถ้าโคโตมิลองเล่นเกมนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งวางหมากครบทุกแบบที่เป็นไปได้ แบบละหนึ่งครั้งคะแนนเฉลี่ยที่โคโตมิได้จะเป็นเท่าไร (หมากสีเดียวกันถือว่าเหมือนกัน)

26. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน ซึ่ง $ab + bc + ca > 0$
จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^4}{(ab+bc+ca)(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$

27. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ $B\hat{A}C = 73^\circ$ และ $A\hat{B}C > B\hat{C}A$ ให้ P เป็นจุดบนด้าน AC ที่ทำให้ $P\hat{B}C = B\hat{C}A$ และให้ Q เป็นจุดบนด้าน AB โดยที่ BP และ CQ ตัดกันที่ X ถ้า $CX = AP + PX$ จงหาขนาดของมุม $B\hat{X}Q$

28. อาคารหลังหนึ่งมี 3 ชั้น และมีห้องอยู่ชั้นละ 9 ห้อง ซึ่งห้องแต่ละห้องจะมีหมายเลขกำกับอยู่ดังรูป ในแต่ละห้องจะมีหลอดไฟอยู่ดวงหนึ่ง และมีสวิตซ์อยู่ตัวหนึ่ง



- **<u>นิยาม</u>** การเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟ หมายความว่า การทำให้หลอดไฟที่เปิดอยู่เปลี่ยนเป็นปิด และหลอดไฟที่ปิดอยู่เปลี่ยนเป็นเปิด
- การสับสวิตซ์จะมีเงื่อนไขคือ เมื่อสับสวิตซ์ในห้องหนึ่ง จะทำให้หลอดไฟในห้องนั้นและในห้องที่อยู่ติดกับห้องนั้นทั้งในด้านซ้าย ขวา หน้า หลัง บน และล่าง เกิดการเปลี่ยนสถานะ (เช่น ถ้าสับสวิตซ์ในห้อง 13 จะทำให้หลอดไฟในห้อง 4, 10, 13, 14, 16 และ 22 เปลี่ยนสถานะ)

ถ้าในตอนแรก หลอดไฟในทุกห้องปิดอยู่ และหลังจากสับสวิตซ์ไปเรื่อยๆ ระยะหนึ่ง พบว่ามีหลอดไฟเพียงดวงเดียวที่เปิดอยู่ คือหลอดไฟในห้อง A
จงหาผลบวกของค่า A ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

29. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงใดๆ
จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ $\frac{x^2}{(4x-3y-z)^2} + \frac{y^2}{(4y-3z-x)^2} + \frac{z^2}{(4z-3x-y)^2}$

30. จงหาจำนวนนับ n ที่มากที่สุด ที่มีสมบัติว่า เราสามารถแบ่งจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n ออกเป็นสองกลุ่มได้ โดยที่ผลบวกของจำนวนสองจำนวนใดๆ ที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันจะต้องไม่เป็นกำลังสามสมบูรณ์