ข้อสอบ TUGMOs ครั้งที่ 6 รอบที่ 2

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 12 เมษายน 2552

คำชี้แจงในการสอบ

1. ข้อสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 25 ข้อ
2. มีเวลาในการแข่งขันตั้งแต่ 14.45 น. - 16.15 น. รวม 1 ชั่วโมง 30 นาที
3. นักเรียนสามารถส่งคำตอบของแต่ละข้อได้ตลอดเวลา และจะส่งคำตอบของข้อใดก่อนก็ได้ ไม่จำเป็นต้องเรียงลำดับ โดยในการส่งคำตอบ ให้เขียนคำตอบลงในกระดาษคำตอบ แล้วส่งให้กรรมการคุมสอบที่ประจำที่โต๊ะของนักเรียน
4. การตอบถูกจะได้คะแนนเท่ากับคะแนนเต็มของข้อนั้นในขณะนั้น โดยในตอนแรก คำถามแต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน และสำหรับคำถามแต่ละข้อ เมื่อมีทีมที่ตอบคำถามข้อนั้นถูก คะแนนเต็มของข้อนั้นจะลดลงเรื่อยๆ ครั้งละ 1 คะแนน (เช่น ทีมที่ตอบข้อนั้นถูกเป็นทีมแรกจะได้ 20 คะแนน ทีมที่สองจะได้ 19 คะแนน ทีมที่สามจะได้ 18 คะแนน และเป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ)
5. การตอบผิดจะถูกหักครั้งละ 5 คะแนน
6. การส่งคำตอบซ้ำในข้อที่เคยตอบถูกไปแล้วจะถูกหักครั้งละ 5 คะแนน
7. ในการตอบคำถามแต่ละข้อ ต้องตอบให้อยู่ในรูปที่ง่ายที่สุดเท่านั้น
8. ในการตอบคำถามแต่ละข้อ ถ้าข้อใดในคำตอบมีจำนวนอตรรกยะ เช่น $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ ต้องตอบให้ติดอยู่ในรูปของจำนวนนั้น ห้ามประมาณค่า
9. ในการตอบคำถามแต่ละข้อ จะใส่หน่วยหรือไม่ใส่ก็ได้
10. นักเรียนสามารถทดลงในข้อสอบฉบับนี้ได้ และนักเรียนจะได้รับกระดาษทดคนละ 2 แผ่น หากไม่พอสามารถขอเพิ่มจากกรรมการคุมสอบได้
11. หลังจากการแข่งขัน นักเรียนสามารถนำข้อสอบฉบับนี้กลับไปได้
12. หากมีข้อสงสัยใดๆ ให้ถามกรรมการคุมสอบที่ประจำที่โต๊ะของนักเรียน
13. รางวัลที่ 1, 2 และ 3 จะมีทีมที่ได้รับเพียงรางวัลละ 1 ทีมเท่านั้น หากเกิดกรณีที่มีทีมที่ได้คะแนนเท่ากัน จะนำคะแนนรวมของสมาชิกในทีมในรอบแรกมาพิจารณาอันดับ

1. ในเวลา 20.08 น. เข็มสั้นและเข็มยาวของนาฬิกาทำมุมป้านกันกี่องศา

2. มีจำนวนเต็มบวกกี่จำนวนที่หาร $192^3 - 113^3 - 79^3$ ลงตัว

3. ตึก A และตึก B ตั้งอยู่ใกล้กัน โดยผนังของตึก B เป็นกระจกเงา โคนาตะ คางามิ และสึคาสะยืนอยู่ริมหน้าต่างของตึก A แต่ยืนอยู่คนละชั้นกัน โคนาตะมองไปที่ผนังของตึก B เห็นเงาสะท้อนของคางามิเป็นมุมเงย 45 องศา และเห็นเงาสะท้อนของสึคาสะเป็นมุมก้ม 30 องศา ถ้าคางามิและสึคาสะอยู่ห่างกัน $72 + 24\sqrt{3}$ เมตร จงหาว่าตึก A และตึก B ตั้งอยู่ห่างกันกี่เมตร

4. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก ให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC และ Q เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง PC ที่ทำให้ $P\hat{B}Q = B\hat{A}C$ ต่อรังสี BQ ไปจนถึงจุด R โดยที่ $Q\hat{A}R = 20^\circ$ จงหาค่าของมุม $B\hat{A}C$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้สามเหลี่ยม ABR เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

5. มีลูกเต๋าอยู่ 2 ลูก ลูกหนึ่งเป็นลูกเต๋าปกติ ส่วนอีกลูกหนึ่งเป็นลูกเต๋าถ่วง โดยโอกาสที่จะออกหน้าที่มี n แต้ม มีค่าเท่ากับ $\frac{n}{21}$ สำหรับทุก $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
จงหาความน่าจะเป็นของการทอยลูกเต๋า 2 ลูกนี้ แล้วได้แต้มรวมเป็น 3, 6 หรือ 9

6. ให้ P เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม ABC ที่ทำให้ $P\hat{B}A = P\hat{C}A = 45^\circ$, $P\hat{B}C = 25^\circ$และ $P\hat{C}B = 20^\circ$ จงหาขนาดของมุม $P\hat{A}C$

7. สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ นำ n มาเขียนเป็นเลขฐานเจ็ด
ให้ $f(n)$ เป็นตัวเลขที่ได้ โดยพิจารณาในฐานสิบ (เช่น 39 สามารถนำมาเขียนในฐานเจ็ดได้คือ $39 = 54_7$ ดังนั้น $f(39) = 54$)
จงหาจำนวนนับ n ทั้งหมดที่ $n = 2f(n) - 167$

8. ให้ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบใดๆ ที่ $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} = 1$
ให้ $S = \{x_1 + x_2 + x_3,\ x_2 + x_3 + x_4,\ x_3 + x_4 + x_5,\ \ldots,\ x_8 + x_9 + x_{10}\}$
ให้ M เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของ S และให้ m เป็นสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดของ S

   i) จงหาค่า M ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้

   ii) จงหาค่า m ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้

9. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข
$a_{2n} = a_n + 1$ และ $a_{2n+1} = a_n - 1$ ทุกจำนวนนับ n
ถ้า $a_{2008} = 2551$ จงหาค่าของ a_{2551}

10. นิยามการดำเนินการ $\oplus$ ดังนี้

    $x \oplus y = (x-1) \oplus (x \oplus (y-1))$ สำหรับทุกจำนวนนับ $x \geq 2$, $y \geq 2$

    $x \oplus 1 = 1 \oplus x = x + 1$ สำหรับทุกจำนวนนับ x

    จงหาค่าของ $5 \oplus 2$

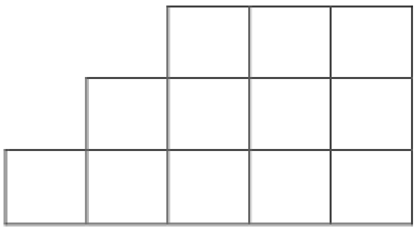
11. มีหินอยู่กองหนึ่ง จำนวน n ก้อน เซ็ตจังและโคโนจังเล่นเกมกัน โดยทั้งคู่ผลัดกันหยิบหินจำนวนหนึ่งออกจากกอง ซึ่งจำนวนหินที่หยิบในแต่ละครั้งจะต้องอยู่ในรูป 2^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ $k \geq 0$ และเซ็ตจังเป็นฝ่ายเริ่มก่อน ใครที่หยิบหินจนหมดกองได้จะเป็นฝ่ายชนะ
จงหาว่ามีจำนวนเต็ม n ทั้งหมดกี่ค่าที่ $1001 \leq n \leq 2000$ และทำให้เซ็ตจังเป็นฝ่ายชนะ เมื่อทั้งสองฝ่ายต่างเล่นด้วยแผนการที่ดีที่สุด

12. ให้ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2008}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ $x_0 = x_{2008}$
และ $x_k x_{k-1} = 2\left(x_k - x_{k-1}\right)^2$ สำหรับทุกจำนวนนับ $k \leq 2008$
ถ้ามีจำนวนนับ $n \leq 2008$ ที่ $x_n = 2008$ จงหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ x_0

13. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ $AB = 7$, $BC = 8$ และ $CA = 9$
ให้ D และ E เป็นจุดบนด้าน BC และ AC ตามลำดับ โดย AD และ BE ตัดกันที่จุด P
ถ้า $B\hat{A}D = C\hat{A}D$ และ $PA = \frac{4\sqrt{21}}{3}$ จงหาความยาวของ DE

14. เกมคอมพิวเตอร์เกมหนึ่งมีกติกาคือ

- มีกระดานลักษณะดังรูป



  คอมพิวเตอร์จะสุ่มตำแหน่งวางหมากขาว 1 ตัว และหมากดำ 1 ตัว ลงในช่องสองช่องใดๆ บนกระดาน
- หมากแต่ละตัวสามารถเดินได้แบบม้าหมากรุก (เดินในแนวตรง 2 ช่องแล้วเลี้ยวซ้ายหรือเลี้ยวขวา แล้วเดินไปอีก 1 ช่อง)
- ในการเดินหมากแต่ละครั้ง ผู้เล่นสามารถเลือกเดินหมากตัวใดก็ได้ แต่ห้ามเดินให้หมากสองตัวมาอยู่ในช่องเดียวกัน
- ผู้เล่นจะต้องพยายามเดินหมากให้หมากทั้งสองมาอยู่สลับที่กัน

เรนะลองเล่นเกมนี้ไปเรื่อยๆ โดยในแต่ละเกม จะพยายามเดินหมากตามเงื่อนไขโดยใช้จำนวนครั้งน้อยที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ จนกระทั่งได้เล่นเกมที่มีตำแหน่งของหมากขาวและหมากดำในตอนเริ่มต้นครบทุกแบบที่เป็นไปได้
เรนะพบว่า เกมที่ใช้จำนวนครั้งในการเดินมากที่สุด มีการเดินทั้งหมด N ครั้ง และเกมที่ใช้จำนวนครั้งในการเดินน้อยที่สุด มีการเดินทั้งหมด n ครั้ง จงหาค่าของ $N^2 + n^2$

15. จงหาค่าของ $\frac{1}{1^4 - 6\cdot 1^2 + 25} + \frac{2}{2^4 - 6\cdot 2^2 + 25} + \frac{3}{3^4 - 6\cdot 3^2 + 25} + \cdots$

16. นักเรียนห้องหนึ่งมี 16 คน นักเรียนแต่ละคนจะเข้าชมรมได้ไม่เกิน 4 ชมรม และชมรมแต่ละชมรมจะมีสมาชิกได้ไม่เกิน 4 คน
นักเรียนสองคนใดๆ จะเรียกว่าเป็น **เพื่อน** กัน เมื่อนักเรียนทั้งสองคนเข้าชมรมเดียวกันอย่างน้อยหนึ่งชมรม
จงหาว่า เมื่อพิจารณานักเรียนทั้งหมดในห้องนี้ จะมี **เพื่อน** เกิดขึ้นได้อย่างมากกี่คู่

17. กำหนด $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ เมื่อ a, b, c, d, e เป็นจำนวนจริง โดยที่ $P(-2) = 8, P(1) = -7, P(3) = -7$
จงหาค่าของ $7P(0) - P(4) + P(-3)$

18. จงหาจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่หาร
$\left(a^2b - ab^2\right)\left(b^2c - bc^2\right)\left(c^2d - cd^2\right)\left(d^2e - de^2\right)\left(e^2a - ea^2\right)$ ลงตัวเสมอ
ไม่ว่า a, b, c, d, e จะเป็นจำนวนเต็มใดๆ ก็ตาม

19. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน และไม่มีตัวใดเป็นศูนย์
จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ $\frac{a^2b^2}{c^2(a-b)^2} + \frac{b^2c^2}{a^2(b-c)^2} + \frac{c^2a^2}{b^2(c-a)^2}$

20. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลมที่ $B\hat{A}C = 60^\circ$
ให้ H เป็นจุดตัดของส่วนสูงทั้งสามเส้นของสามเหลี่ยม ABC
ให้ I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม ABC
ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC
ถ้า $I\hat{H}O = 12^\circ$ จงหาขนาดของมุม $H\hat{I}O$

21. ร้านค้ามีแสตมป์ขายอยู่สามราคา คือ 17, 220 และ 2551 บาท ยูกิมีเงินอยู่ k บาทและต้องการซื้อแสตมป์ให้รวมเป็นมูลค่าเท่ากับจำนวนเงินที่มีอยู่พอดี (ไม่จำเป็นต้องซื้อแสตมป์ครบทั้งสามชนิด)
จงหาจำนวนนับ k ที่มากที่สุดที่ทำให้ยูกิไม่สามารถซื้อแสตมป์ตามที่ต้องการได้

22. ซากุระและโทโมโยะเล่นเกมกัน โดยมีขั้นตอนดังนี้

    1. ซากุระเลือกจำนวนขึ้นมา k จำนวน จากจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100
    2. โทโมโยะเลือกจำนวนขึ้นมา 4 จำนวน จากจำนวนที่ซากุระเลือกไว้ในขั้นที่ 1
    3. ซากุระเลือกจำนวนขึ้นมา 2 จำนวน จากจำนวนที่โทโมโยะเลือกไว้ในขั้นที่ 2
    4. ถ้าสองจำนวนนั้นมี ห.ร.ม. เป็น 1 โทโมโยะจะเป็นฝ่ายชนะ แต่ถ้าสองจำนวนนั้นมี ห.ร.ม. ไม่เป็น 1 ซากุระจะเป็นฝ่ายชนะ

    จงหาค่า k ที่มากที่สุดที่ทำให้ซากุระเป็นฝ่ายชนะ เมื่อทั้งสองฝ่ายต่างเล่นด้วยแผนการที่ดีที่สุด

23. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบใดๆ ซึ่งทั้งสามตัวไม่เป็นศูนย์พร้อมกันหมด
จงหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ $\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)^3} - \frac{a^4+b^4+c^4}{(a+b+c)^4}$

24. กำหนด **แต้ม** ของเซต A หมายถึง จำนวนของชุดอันดับ (x, y, z) ที่ $x, y, z \in A$ โดยที่ $x + y = z$ และ $x < y$
จงหาผลรวมของ **แต้ม** ของเซตทุกเซตที่เป็นสับเซตของ $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

25. จงเขียนจำนวนลงในแต่ละช่องของตาราง 4×4 ให้สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

- จำนวนในแต่ละช่องจะต้องเป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันทั้งหมด
- จำนวนในแต่ละช่องจะต้องมีค่าไม่เกิน 30
- ผลคูณของจำนวนในแต่ละแถว แต่ละหลัก และในแนวทแยงมุมทั้งสองแนวจะต้องมีค่าเท่ากันทั้งหมด