

ข้อสอบ TUMSO ครั้งที่ 1 รอบที่ 1

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 2 กรกฎาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 ชมรมคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>



การแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระหว่างโรงเรียน ครั้งที่ 1 โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
สอบแข่งขันวิชาคณิตศาสตร์ รอบที่ 1

ตอนที่ 1 ปรนัย 22 ข้อ ข้อละ 2.5 คะแนน

1. สัตว์ 5 ตัว คือ A B C D E ซึ่งไม่เป็นสุนัขป่าก็เป็นสุนัขบ้าน ถ้าสุนัขบ้านพูดแต่ความจริง
เสมอ และสุนัขป่าพูดแต่ความเท็จเสมอ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- A บอกว่า B เป็นสุนัขบ้าน
- B บอกว่า C เป็นสุนัขป่า
- C บอกว่า D เป็นสุนัขป่า
- D บอกว่า B และ C เป็นสุนัขต่างชนิดกัน
- E บอกว่า A เป็นสุนัขบ้าน

จงหาจำนวนของสุนัขบ้าน

- ก. 1 ข. 2 ค. 3 ง. 4

2. กำหนดให้

- R แทนเซตของจำนวนจริง
- I แทนเซตของจำนวนเต็ม
- N แทนเซตของจำนวนนับ
- Q แทนเซตของจำนวนตรรกยะ
- Q' แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

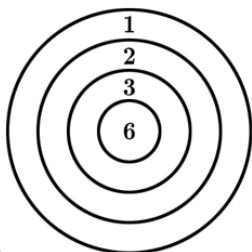
จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- 1) $R - [(Q - I) \cup (I - N) \cup Q'] = N$
- 2) $[I - (Q \cup N)] \cup (Q - I) \subset R - (I - N)$

- ก. ข้อ 1 ถูกต้องเพียงข้อเดียว
- ข. ข้อ 2 ถูกต้องเพียงข้อเดียว
- ค. ทั้งข้อ 1 และข้อ 2 ถูกต้อง
- ง. ทั้งข้อ 1 และข้อ 2 ไม่ถูกต้อง

12. \vec{u}, \vec{v} เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม 120° โดย $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$
ถ้า $\vec{u} + 2\vec{v} - 4\vec{w} = \vec{0}$ ค่าของ $2\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$ คือข้อใด
ก. -1.25 ข. -2.5 ค. -1.5 ง. -3
13. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $\left| \frac{z+1}{z+(3-2i)} \right| = 1$ และ $z \cdot \bar{z} = 29$
จงหาผลบวกค่า z ที่สอดคล้องสมการนี้
ก. $2 + 5i$ ข. $-5 - 2i$ ค. $3 + 3i$ ง. $-3 + 3i$
14. ในลำดับหนึ่งซึ่งมี 200 พจน์ ทุกๆ พจน์ (ยกเว้นพจน์แรกและพจน์สุดท้าย) จะมีค่าเท่ากับผลบวกของพจน์ก่อนหน้า กับพจน์ถัดไปในลำดับ โดยที่ผลบวกของทุกพจน์ในลำดับมีค่าเท่ากับผลบวก 100 พจน์แรก ถ้าพจน์ที่ 35 มีค่า -6 จงหาผลบวกของทุกพจน์ในลำดับ
ก. -3 ข. 0 ค. 6 ง. 9
15. จงหาค่าของ $3\frac{1}{3} \cdot 9\frac{1}{9} \cdot 27\frac{1}{27} \cdot 81\frac{1}{81} \dots$
ก. 3 ข. $3\frac{1}{2}$ ค. $3\frac{2}{3}$ ง. $3\frac{3}{4}$
16. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(-4) = -3$ และ $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h-4)}{h} + \frac{3}{h} \right] = 12$
ถ้า $g(x) = x^2 f(x) - 3x + 1$ แล้วความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุด $(-4, -35)$ มีค่าตรงกับข้อใด
ก. 219 ข. 213 ค. 168 ง. 165
17. ในการคัดเลือกคณะกรรมการนักเรียนของห้องเรียนห้องหนึ่ง จำนวน 5 คน จากนักเรียนในห้อง 20 คน ปรากฏว่ามีนักเรียน 2 คนที่ไม่ถูกกัน คือทั้งสองคนจะเป็นกรรมการพร้อมกันไม่ได้ จงหาจำนวนวิธีการเลือกกรรมการห้องเรียนดังกล่าว
ก. $\frac{2 \cdot 18!}{15!}$ ข. $\frac{3 \cdot 18!}{15!}$ ค. $\frac{4 \cdot 18!}{15!}$ ง. $\frac{12 \cdot 18!}{15!}$
18. สำหรับจำนวนเต็มบวก $n > 1$ ใดๆ ให้ a_n เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^{n+2} ในการกระจาย $(1+2x)^{2n}$ และให้ b_n เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^n ในการกระจาย $(2+3x)^{2n}$ ลิมิตของลำดับ $3^n \cdot \frac{a_n}{b_n}$ มีค่าเท่าใด
ก. 0 ข. $\frac{4}{3}$ ค. 4 ง. หาริไม่มีไม่ได้

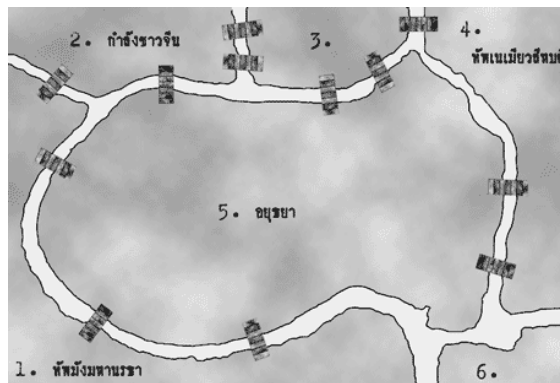
19. การสอบยิงปืนของโรงเรียนรักษาดินแดน ใช้เป้ายิง ปลาย. แบบ จ. มีแต้ม 1, 2, 3, 6 คะแนน เรียงเป็นวงกลมจากนอกเข้าไปในตามลำดับ (ดังภาพ) นศท. นายหนึ่งทำการยิง 5 นัด โดยฝีมือการยิงของ นศท. นายนี้ เขามีความน่าจะเป็นที่จะยิงเข้าเป้าส่วนที่ได้ n แต้ม เป็น $\frac{1}{2^n}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, 6$ ครูฝึกบอกว่าต้องทำคะแนนให้ได้ไม่น้อยกว่า 24 แต้ม จึงจะสอบผ่าน จงหาความน่าจะเป็นที่ นศท. นายนี้จะสอบผ่าน



จ.

- ก. $\frac{4}{12^4}$ ข. $\frac{6}{12^4}$ ค. $\frac{8}{12^4}$ ง. 1 เพราะครูฝึกใจดี
20. ในการวิเคราะห์ข้อมูลชุดหนึ่ง นายองอาจสามารถหาได้ว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตมีค่าเท่ากับ 20 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น $2\sqrt{2}$ แต่ต่อมานายองอาจพบว่าตนเองหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตผิด ซึ่งที่ถูกต้องควรจะเป็น 22 จงหาว่าค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ถูกต้องควรเป็นเท่าไร
- ก. $\sqrt{6}$ ข. $\sqrt{2}$ ค. 2 ง. ไม่สามารถหาได้
21. นการสอบคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง คะแนนสอบมีการแจกแจงแบบปกติ เกณฑ์ในการคิดระดับคะแนนเป็นดังนี้ ได้คะแนนตั้งแต่ $\bar{x} + 1.5S$ ขึ้นไป จะได้รับระดับคะแนน 4 ได้คะแนนในช่วง $\bar{x} + 0.5S < x_i < \bar{x} + 1.5S$ จะได้รับระดับคะแนน 3 ได้คะแนนในช่วง $\bar{x} - 0.5S < x_i < \bar{x} + 0.5S$ จะได้รับระดับคะแนน 2 ได้คะแนนในช่วง $\bar{x} - 1.5S < x_i < \bar{x} - 0.5S$ จะได้รับระดับคะแนน 1 ได้คะแนนตั้งแต่ $\bar{x} - 1.5S$ ลงไป จะได้รับระดับคะแนน 0 ถ้าการสอบครั้งนี้มีนักเรียนได้ระดับคะแนน 1 อยู่ 24 คน อยากทราบว่าจะมีนักเรียนกี่คนที่สอบได้ระดับคะแนน 4 (โดยประมาณใกล้เคียงที่สุดเป็นจำนวนเต็ม) โดยกำหนด $z = 0.5$ ได้ $A = 0.1915$ และ $z = 1.5$ ได้ $A = 0.4332$
- ก. 5 ข. 7 ค. 9 ง. 10

22. ตามความในจดหมายเหตุกรุงศรีอยุธยาฉบับหอสมุดแห่งชาติ ราว พ.ศ. 2310 ก่อนการเสียกรุงครั้งที่ 2 ปรากฏแผนที่แสดงสะพานข้ามคูเมือง (แม่น้ำเจ้าพระยา, แม่น้ำลพบุรี, แม่น้ำป่าสัก) ซึ่งล้อมพระนครไว้ ครั้งนั้นเป็นฤดูน้ำหลาก เกิดน้ำท่วมบริเวณ (6) และมีหลักฐานว่าทัพพม่ากรีธาทัพเข้าประชิดกรุงศรีอยุธยาและตั้งค่ายอยู่บริเวณต่างๆ ดังแสดงในภาพ ขณะนั้นไทยมีกำลังกองลาดตระเวนเพียง 1 กอง จะทำการลาดตระเวน 1) จะสามารถนำทหารลาดตระเวนออกจาก (5) ข้ามสะพานละ 1 ครั้ง ทุกสะพาน ได้หรือไม่ 2) จะนำกำลังออกลาดตระเวนออกจาก (5) ผ่านบริเวณต่างๆ บริเวณละไม่เกิน 1 ครั้ง และผ่าน (1) หรือ (4) ได้กี่วิธี



- ก. ได้, 29 วิธี ข. ไม่ได้, 29 วิธี ค. ได้, 39 วิธี ง. ไม่ได้, 39 วิธี

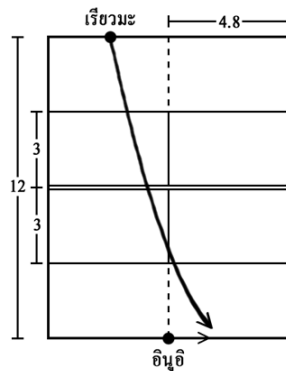
ตอนที่ 2 เต็มเฉพาะคำตอบ 8 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

- กำหนดให้ $n(A)$ หมายถึงจำนวนสมาชิกของเซต A , $P(A)$ หมายถึงเพาเวอร์เซตของเซต A ถ้า $n(P(C)) - 3 \cdot n(P(B)) + n(P(A)) = 2001$ และ $n(C) = 3 \cdot n(B) - 1$ แล้วจงหาค่าของ $n(A) + n(B) + n(C)$
- ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องสมการ $xy = 490$ และ $(\log x - \log 7)(\log y - \log 7) = -\frac{15}{4}$ เมื่อ $x > y$ แล้วจงหาค่าของ x
- จงหาผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $x^{\log_3 x^2 + (\log_3 x)^2 - 10} = x^{-2}$
- กำหนดให้ $f(x) = (3 \sin x - 4 \cos x - 10)(3 \sin x + 4 \cos x - 10)$ จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ $f(x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ
- ให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุมกัน θ ; $(0 < \theta < \pi)$ โดย \vec{u} มีขนาดเท่ากับ a และ \vec{v} มีขนาดเท่ากับ b ให้ \vec{w} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ทำมุม $\frac{\theta}{2}$ กับทั้ง \vec{u} และ \vec{v} จงเขียน \vec{w} ในรูปของ $m\vec{u} + n\vec{v}$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนจริง (ติดค่า a, b และ θ)
- พิจารณาลำดับของจำนวนตรรกยะ $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ จงหาว่าพจน์ที่มีค่า $\frac{1}{2}$ จะปรากฏเป็นครั้งที่ n ณ พจน์ที่เท่าใด

7. จงหาจำนวนวิธีในการสร้างจำนวน 12 หลัก จากเลขโดด 1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4 โดยมีเงื่อนไขว่า เมื่ออ่านจำนวนนี้จากซ้ายไปขวาต้องพบ i อย่างน้อย 1 ตัวก่อนที่จะพบ $i + 1$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$
8. หมู่บ้านแห่งหนึ่งมี 10 ครัวเรือน ทุกครอบครัวปลูกบ้านติดริมถนนซึ่งเป็นเส้นตรงและอยู่ฝั่งเดียวกันของถนน โดยมีระยะห่างระหว่างบ้านที่อยู่ติดกันเป็น 1,2,4,5,8,4,3,2,1 กิโลเมตร นับจากหลังแรกที่อยู่ริมสุด วันหนึ่งมีร้านเครื่องใช้ไฟฟ้ามาเปิดใหม่ ถ้าแต่ละครัวเรือนจะส่งเครื่องใช้ไฟฟ้ามา 1 อย่าง แต่ทางร้านมีคนส่งของเพียงคนเดียวและเดินส่งของได้ทีละ 1 อย่างเท่านั้น อยากทราบว่าร้านเครื่องใช้ไฟฟ้าแห่งนี้ควรจะตั้งที่ตำแหน่งห่างจากบ้านหลังแรกที่อยู่ริมสุดเป็นระยะทางเท่าใด จึงจะใช้เวลาในการส่งของน้อยที่สุด เมื่อคนส่งของเดินส่งของด้วยอัตราเร็วคงที่

ตอนที่ 3 เต็มเฉพาะคำตอบ

1. ให้คอร์ตเทนนิสมีขนาดกว้าง 4.8 เมตร ยาว 12 เมตร และมีเขตเสิร์ฟยาว 3 เมตร ดังรูป ให้เรียวมะยืนเตรียมเสิร์ฟที่คอร์ตด้านบน บริเวณกึ่งกลางเส้นเสิร์ฟฝั่งซ้าย และอินุอียืนรอรับลูกเสิร์ฟอยู่บริเวณกึ่งกลางเส้นเสิร์ฟ จากนั้นเรียวมะใช้ลูกเสิร์ฟทวิสตีเสิร์ฟมาด้วยความรุนแรง แต่อินุอิคำนวณได้ว่าลูกเทนนิสจะเคลื่อนที่เป็นพาราโบลา โดยมีสมการคือ $48y = 55x^2 + 234x$ อินุอิจึงออกตัวเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็วคงที่ a เมตรต่อวินาที² และสามารถรับลูกได้ภายในเวลา 4 วินาทีพอดี จงหาค่าของ a



(6 คะแนน)

2. จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 8x + 16 = 0$

(7 คะแนน)

3. ในปี 25xx ณ โรงเรียนเตรียมอุดม หลังการสอบกลางภาค มีนักเรียนเตรียมอุดมจำนวนมากเกิดอาการท้องเสียขึ้นพร้อมกันโดยไม่ทราบสาเหตุ ทางชมรมคณิตศาสตร์เกิดความประหลาดใจจึงสืบหาความจริง จนพบว่านักเรียนกลุ่มหนึ่งที่ไม่มีอาการท้องเสียปรากฏขึ้น และก็พบว่านักเรียนกลุ่มนี้เป็นนักเรียนสายศิลป์-ภาษาทั้งหมด ทางชมรมจึงสันนิษฐานว่าต้นเหตุน่าจะมาจากข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์จึงทำการสืบต่อไป และพบว่าในข้อสอบนั้นมีข้อสอบถอดรหัสข้อหนึ่งซึ่งยากมาก ทางกรรมการชมรมจึงพยายามที่จะไปรหัสแต่ก็ไม่สำเร็จ จนกรรมการทุกคนท้องเสียหมดสภาพที่จะไขรหัสต่อไป ข้อสอบชุดนี้จึงถูกเรียก “ลิง ข้อสอบมรณะ” ซึ่งต้องไขรหัสให้ได้ภายใน 3 ชั่วโมง มิเช่นนั้นจะเกิดอาการท้องเสียอย่างรุนแรงทันที

ในเวลาเดียวกันนั้นนายองอาจ กรรมการชมรมคณิตศาสตร์คนหนึ่ง ได้ลุกขึ้นจากเตียงด้วยความงัวเงีย เขาเพิ่งรู้ว่าตื่นสายเสียแล้วทั้งที่เป็นวันสอบของเขา นายองอาจจึงรีบออกจากบ้านไปโรงเรียนอย่างรวดเร็ว พอมาถึงนายองอาจก็รู้สึกตกใจอย่างยิ่งเมื่อได้พบว่าโรงเรียนอยู่ในสภาพที่ไม่เคยเห็นมาก่อน คือเต็มไปด้วยความโกลาหล มีแต่คนแย่งกันเพื่อจะเข้าห้องน้ำ ระหว่างนั้นนายองอาจก็ได้พบนายจรรยาพลรุ่นน้องกรรมการชมรมที่อยู่ในสภาพขาดน้ำและเกลือแร่ นายองอาจจึงรู้ความจริงเกี่ยวกับ “ลิง” และกลายเป็นความหวังสุดท้ายของชมรมในการแก้วิกฤตการณ์นี้ นายองอาจจึงถอดรหัสเอาถรรพ์อย่างสุดชีวิต หลังจากเวลาผ่านไปเกือบ 3 ชั่วโมง ในที่สุดนายองอาจก็หาวิธีถอดรหัสได้ เขาสามารถถอดรหัสได้เรื่อยๆ ขณะที่ถอดรหัสสุดท้ายนั้น นางสาวหลิน (นามสมมติ) แฟนสาวของนายองอาจได้โทรศัพท์เข้ามา ทำให้นายองอาจเสียสมาธิ และไขรหัสสุดท้ายไม่ทันจึงท้องเสียหมดทำอยู่ตรงนั้น แต่เขาก็ได้ทำสิ่งที่เขาแก้ไขได้บางส่วนเพื่อไว้ให้ท่านช่วยถอดรหัสต่อไปนี้

9 8 6 1
2 4 3 4

อ่านได้ว่า TU และ

3 1 1 0 3 1 4 4
7 5 8 9 4 6 2 7

อ่านได้ว่า HINT

อยากทราบว่ารหัสสุดท้ายคือ

5 5 6 1 3 2 8 2 7 5 9 8 4 1
1 5 4 2 2 3 6 3 1 2 5 6 1 2

อ่านได้ว่าอะไร

(8 คะแนน)