

ข้อสอบ TUMSO ครั้งที่ 2 รอบที่ 1

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 5 กรกฎาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 ชมรมคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้  
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>



การแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระหว่างโรงเรียน ครั้งที่ 2 โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา  
สอบแข่งขันวิชาคณิตศาสตร์ รอบที่ 1

**ตอนที่ 1** ข้อสอบแบบเลือกตอบ ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้  $X$  เป็นเซตของคู่ลำดับของจำนวนเต็มบวก  $(a, b)$  โดยที่  $99 - a = b$  และ

- $a$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 1
- $b$ หารด้วย 5 เหลือเศษ 1

จำนวนสมาชิกของ  $X$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก. 5                      ข. 6                      ค. 7                      ง. 8

2. A, B, C, D เป็นเจ้าของรถแต่ละคนละสีต่อไปนี้ คือ สีแดง สีเหลือง สีขาว และสีดำ เราไม่ทราบว่าใครเป็นเจ้าของรถคันไหน เราทราบแต่เพียงว่า หากใครพูดเกี่ยวข้องกับรถของตนทั้งหมดหรือบางส่วน เขาจะพูดจริงเสมอ แต่ถ้าไม่เกี่ยวข้องเลย เขาจะพูดเท็จ

A: “มีรถ 3 คันเท่านั้นที่ติดวิทญู คือรถของตนเอง รถสีเหลือง และรถสีดำ”

B: “C โขคตื่นะที่มีรถติดวิทญูซึ่งเป็น 1 ใน 3 ที่ติดวิทญู”

C: “รถสีดำเป็นของ A”

D: “ฉันไม่เคยขับรถสีขาวหรือสีดำเลย”

จงพิจารณาว่า A เป็นเจ้าของรถคันใด

- ก. สีแดง                      ข. สีเหลือง                      ค. สีขาว                      ง. สีดำ

3. ให้  $x, y, z$  เป็นจำนวนเต็ม และ  $*$  เป็นตัวดำเนินการทวิภาคซึ่ง

i)  $x * (y + z) = (x * y) - z$

ii)  $(y + z) * x = (y * z) + 2z$

iii)  $1 * 1 = 1$

ข้อใดต่อไปนี้คือค่าของ  $25 * 47$

- ก. 1                      ข. 2                      ค. 3                      ง. 4

4. ให้  $A = (10 + \sqrt{99})^{2004}$  เมื่อเขียน  $A$  ในระบบเลขฐานสิบ แล้วเลขหลักหน่วยของ  $A$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก. 1                      ข. 3                      ค. 7                      ง. 9

5. ผลบวกของสมาชิกของเซตคำตอบของสมการ

$$\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{8}$$

ในช่วง  $[0, \pi]$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก.  $\frac{\pi}{4}$                       ข.  $\frac{3\pi}{4}$                       ค.  $\frac{3\pi}{2}$                       ง.  $\frac{5\pi}{2}$

6. ให้  $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2\sqrt{x-1} \leq 1\}$  แล้ว  $n(P(A))$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก. 1                      ข. 2                      ค. 4                      ง. 8

7. ให้  $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$ ,  $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$  แล้ว  $x$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก.  $10^{\frac{1}{\log z}}$                       ข.  $10^{\frac{1}{1-\log z}}$                       ค.  $10^{\log z}$                       ง.  $10^{1-\log z}$

8. ให้  $m, n$  เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง  $m \geq n$  และ  $\vec{v}_k = \binom{m}{k}\vec{i} + \binom{n}{k}\vec{j}$  สำหรับ  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- i)  $\sum_{k=0}^n |\vec{v}_k|^2 = \sum_{k=0}^n [\binom{m}{k} + \binom{n}{k}]^2 - 2\binom{m+n}{m}$   
 ii)  $|\vec{v}_k|^2 = 2$  ทุก  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  แล้ว  $m = n = 1$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- ก. ข้อ i) เท่านั้นเป็นจริง                      ข. ข้อ ii) เท่านั้นเป็นจริง  
 ค. ข้อ i) และ ii) เป็นจริง                      ง. ข้อ i) และ ii) เป็นเท็จ

9. ให้  $A, B$  เป็นเมตริกซ์ขนาด  $3 \times 3$  มิติ ซึ่ง  $A + B = AB$  จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- i)  $A^2 - B^2 = A^2B - AB^2$   
 ii) ถ้า  $(A + B)^3 = A^3 + B^3$  แล้ว  $A + B$  เป็นนอนซิงกูลาร์-เมตริกซ์

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- ก. ข้อ i) เท่านั้นเป็นจริง                      ข. ข้อ ii) เท่านั้นเป็นจริง  
 ค. ข้อ i) และ ii) เป็นจริง                      ง. ข้อ i) และ ii) เป็นเท็จ

10. ค่าของผลบวก  $\sum_{k=0}^{2003} \frac{2003!(2546-k)!}{2546!(2003-k)!}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก.  $\frac{2546}{543}$                       ข.  $\frac{2547}{543}$                       ค.  $\frac{2546}{544}$                       ง.  $\frac{2547}{544}$

11. สำหรับแต่ละจำนวนนับ  $n$  กำหนดให้

$$a_n = \operatorname{Re} \left( (\sqrt{2} + i)^n \right), b_n = \operatorname{Im} \left( (\sqrt{2} + i)^n \right)$$

แล้ว  $a_{2004}b_{2003} - a_{2003}b_{2004}$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก.  $3^{2003}$                       ข.  $-3^{2003}$                       ค.  $3^{2004}$                       ง.  $-3^{2004}$

12. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

i)  $\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{df^{-1}(x)}{df(f^{-1}(x))}$  ทุกฟังก์ชัน  $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ii) ถ้า  $e^x = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$  แล้ว  $\frac{de^x}{dx} = e^x$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. ข้อ i) เท่านั้นเป็นจริง

ข. ข้อ ii) เท่านั้นเป็นจริง

ค. ข้อ i) และ ii) เป็นจริง

ง. ข้อ i) และ ii) เป็นเท็จ

13. นิยาม ลำดับฐานสาม (Ternary sequence) ความยาว  $n$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนนับ หมายถึง ลำดับ  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ซึ่ง  $a_i \in \{0, 1, 2\}$  ทุก  $i = 1, 2, \dots, n$  ตัวอย่างเช่น 2,0,1,2,1,2 เป็น ลำดับฐานสามความยาว 6

จากนิยามข้างต้น จะได้ว่าจำนวนลำดับฐานสามความยาว 2004 ซึ่งใช้เลข 0 เป็นจำนวนคู่ ตัว มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $\frac{3^{2004}+1}{2}$

ข.  $\frac{3^{2004}-1}{2}$

ค.  $\frac{3^{2003}+1}{2}$

ง.  $\frac{3^{2003}-1}{2}$

14. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ห้องหนึ่งมี 50 คน พบว่าคะแนนสอบเอ็นทรานซ์วิชาคณิตศาสตร์ เป็นดังนี้

• ค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 72

• สัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากับร้อยละ  $4\frac{1}{6}$

ต่อมาทบวงมหาวิทยาลัยเพิ่มคะแนนให้ผู้เข้าสอบที่ตรวจผิดพลาดคนละ 3 คะแนน จงพิจารณา ข้อความต่อไปนี้

i) ถ้าอนงค์นาถเป็นคนเดียวในห้องที่ไม่ได้เพิ่ม และผลบวกกำลังสองของคะแนนใหม่ ของทั้งห้องเป็น 281,241 อนงค์นาถจะได้คะแนนเท่ากับ 75

ii) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนใหม่ประมาณเป็นจำนวนเต็มได้ 75 คะแนน

iii) จากข้อ i) หากคะแนนสอบในห้องมีการแจกแจงปกติ อนงค์นาถจะได้คะแนนที่เปอร์เซ็นต์ไทล์สูงกว่า 75

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ i) และ ii)

ข. ข้อ i) และ iii)

ค. ข้อ ii) และ iii)

ง. ข้อ i), ii) และ iii)

15. ราคาโทรทัศน์รุ่นหนึ่งในปีต่างๆ เป็นดังนี้

ปีที่	1	2	3	4
ราคา (บาท)	2,900	2,475	3,125	3,300
ดัชนีราคาผู้บริโภค	100	110	125	120

จงหาค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกของราคาแท้จริงของโทรทัศน์รุ่นนี้ใน 4 ปี

- ก. 2,565.81      ข. 2,575.81      ค. 2,585.81      ง. 2,595.81

**ตอนที่ 2** ข้อสอบแบบเติมคำตอบ ข้อละ 4 คะแนน

- ในการสอบครั้งหนึ่งซึ่งมีข้อสอบทั้งหมด 4 ข้อ มีนักเรียนเข้าสอบ 100 คน พบว่าข้อแรกมีนักเรียนตอบถูก 90 คน ข้อสองมีนักเรียนตอบถูก 80 คน ข้อสามมีนักเรียนตอบถูก 70 คน ข้อสี่มีนักเรียนตอบถูก 60 คน และไม่มีนักเรียนคนใดที่ตอบถูกทั้งสี่ข้อ จงหาว่ามีนักเรียนจำนวนกี่คนที่ตอบถูกทั้งข้อสามและข้อสี่
- จำนวนเต็ม  $2^{100!} - 1$  หารด้วย 100 เหลือเศษเท่าใด
- กำหนดให้  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$   
จงหา  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ทั้งหมดที่ทำให้

$$(f(x))^3 + 6xf(x) + 12x = (x^2 + 12)f(x) + 2x^2 + 16$$

ทุก  $x \in A$

- จงหาคาบของฟังก์ชัน  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ซึ่งกำหนดโดย

$$f(\theta) = 4 \cos\left(\theta - \frac{3\pi}{8}\right) \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{8}\right) \cos(\pi - 3\theta) - 2 \cos\frac{3\pi}{8} \sin\left(4\theta - \frac{5\pi}{8}\right)$$

- กำหนดให้  $O_1$  เป็นวงกลมรัศมี 4 เซนติเมตร  $O_2$  เป็นวงกลมรัศมี 6 เซนติเมตร และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนวงกลม  $O_1$  ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของพื้นที่ซึ่งอยู่นอกส่วนที่ซ้อนกันเป็นเท่าใด
- กำหนด  $A(-a, 0), B(a, 0)$  ซึ่ง  $a > 0$  และ  $H(x, y)$  เป็นจุดที่อยู่เหนือแกน  $X$  ถ้า  $AC$  เกิดจากการหมุน  $AH$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม  $90^\circ$  โดยมี  $A$  เป็นจุดหมุน  $BD$  เกิดจากการหมุน  $BH$  ในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม  $90^\circ$  โดยมี  $B$  เป็นจุดหมุน และ  $E$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $CD$  จงหาพิกัดของ  $E$  ในรูป  $a, x, y$
- กำหนด  $x, y$  เป็นจำนวนเต็มที่สุดคัล้องสมการ

$$\frac{\ln(x-y)}{\ln x - \ln y} = e^{\ln(\sin 4x \cot 2x - \cos 4x)}$$

แล้ว  $x + y$  มีค่าเท่าใด

8. จงหาจำนวนคำตอบของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 36$$

เมื่อ  $x_i$  เป็นจำนวนเต็มซึ่ง  $2 \leq x_i \leq 8$  ทุก  $i = 1, 2, \dots, 6$  (ตอบเป็นผลสำเร็จ)

9. จงหาจำนวนทั้งหมดที่เป็นไปได้ของจำนวนที่มี  $(4! + 8!)^2$  หลัก ซึ่งมีหลักแรกขึ้นต้นด้วย 8 และทุกๆ 4 หลักบวกกันได้ 29

10. ในการขายตุ๊กตาเพื่อหารายได้ของชมรมคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ขายตุ๊กตาชายและตุ๊กตาหญิงได้กำไรตัวละ 70 และ 60 บาทตามลำดับ หากขายตุ๊กตาชายได้  $x$  ตัว และตุ๊กตาหญิง  $y$  ตัว และมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$|x - 300| + y \leq 500$$

$$5x + y \leq 3000$$

$$y \leq 400$$

อยากรทราบว่า จะได้กำไรมากที่สุดเมื่อขายตุ๊กตาได้ทั้งหมดกี่ตัว

**ตอนที่ 3** ข้อสอบแบบเติมคำตอบ ข้อละ 6 คะแนน

1. กำหนดให้  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ซึ่งสอดคล้องสมการ

$$f(x) + f(x-1) = x^2$$

ทุก  $x \in \mathbb{R}$

ถ้า  $f(25) = 47$  จงหาตัวเลขหลักสุดท้ายของ  $f(2004)$

2. จงหาค่าของ  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$

3. จากการกระจาย

$$\left( \sum_{i=1}^{20} a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{20} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 20} a_i a_j$$

ถ้ามีพจน์  $a_i a_j$  โดยที่  $i \neq j$  เป็นจำนวนบวกและลบเท่ากัน  
แล้วจะมี  $i$  ที่  $a_i$  เป็นจำนวนบวก ได้มากที่สุดกี่ตัว

4. สำหรับจำนวนจริง  $x$  ใดๆ กำหนดให้

$$f(x) = \text{จำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ } x$$

$$g(x) = \text{ตัวหารร่วมมากของ } x \text{ และ } 2$$

จงหาพื้นที่ใต้กราฟ  $(g \circ f)(x)$  ตั้งแต่  $x = 0$  ถึง  $x = 10$

#### ตอนที่ 4 ข้อสอบแบบตอบพร้อมแสดงวิธีคิด ข้อละ 6 คะแนน

หลายคนอาจคิดว่าเหตุการณ์การก่อการร้ายเมื่อวันที่ 11 กันยายน พ.ศ. 2544 นั้น เป็นเรื่อง  
ที่เหลือวิสัยจะรับทราบหรือวางแผนป้องกันได้ แต่แท้ที่จริงแล้ว หน่วยสืบราชการลับ (CIA) ของ  
สหรัฐอเมริกาได้รับทราบเบาะแสก่อนหน้านั้นแล้ว โดยทาง CIA ได้รับรายงานจากธนาคารกลาง  
สหรัฐฯ ว่ามีการโอนเงินจากบัญชีของนายโอซามะ บินลาดีน ไปยังชายชาวอาหรับสองคน ได้แก่  
นายฮัมบาลี และนายฮีบาลัม ในจำนวนเงินที่น่าสงสัย โดยนายฮัมบาลีได้รับเงินจำนวน

361,509,668,818,966,982,798,599,420,239 รูเปีย

และนายฮีบาลัมได้รับเงินจำนวน

978,785,612,436,235,995,353,508 ดอลลาร์

ทาง CIA ได้ทำการติดตามเฝ้าดูพฤติกรรมของชายทั้งสองเป็นเวลานาน แต่ไม่มีสิ่งใดผิดปกติ  
จนถึงวันที่ 10 กันยายน พ.ศ. 2544 ทาง CIA จึงสืบรู้ว่าแท้ที่จริงจำนวนเงินที่ถูกโอนเข้าใน  
บัญชีของชายทั้งสองเป็นรหัสลับจากนายโอซามะ บอกเป้าหมายก่อการร้าย เจ้าหน้าที่ CIA ได้ใช้  
ความพยายามอย่างเต็มที่แกะรหัสนั้นแต่ก็ไม่สำเร็จ จนเช้าวันรุ่งขึ้นก็เกิดเหตุโศกนาฏกรรม  
ดังกล่าว

เจ้าหน้าที่ CIA สืบทราบภายหลังว่านายฮัมบาลีเป็นผู้ลงมือก่อการร้ายถล่มตึก World Trade  
Center ส่วนนายฮีบาลัมลงมือก่อการร้ายถล่มตึก Pentagon ทาง CIA จึงหาวิธีถอดรหัสนั้น  
จนสำเร็จ และใช้เป็นเครื่องมือป้องกันการก่อการร้ายครั้งสำคัญๆ ได้หลายครั้ง (รวมทั้งในการ  
ประชุม APEC ครั้งที่ผ่านมายุ่ง)

ล่าสุดเจ้าหน้าที่ CIA ได้เดินทางมาเพื่อส่งข่าวให้แก่สำนักงานตำรวจแห่งชาติ ประเทศไทย ว่า  
มีการวางแผนก่อการร้ายสถานที่สำคัญของไทย แต่ทางกลุ่มผู้ก่อการร้ายทราบข่าว และดักวาง  
ยาบ้าเจ้าหน้าที่ CIA นายนั้นในระหว่างทาง จนเจ้าหน้าที่ตำรวจเข้าใจผิด ทำการวิสามัญฆาตกรรม  
(ฆ่าและตัดตอน) เจ้าหน้าที่ CIA ผู้โชคร้ายผู้นั้น จากการชันสูตรพลิกศพโดย คุณหญิง พ.ญ.  
พันธุ์ทิพย์ โรจนสุนทร พบเศษกระดาดะจตรหัสนั้นบอกสถานที่เป้าหมายการก่อการร้ายในตัวของ  
เจ้าหน้าที่ CIA นายนั้น รหัสนั้นมีว่า

981,087,287,611,149,485

ทางสำนักงานตำรวจแห่งชาติ ได้พยายามติดต่อกลับไปยังหน่วย CIA แต่ทาง CIA ปฏิเสธ  
จะบอกวิธีการถอดรหัสนี้ โดยอ้างว่าทางการไทยต้องขอใช้ต่อกรตายของเจ้าหน้าที่ CIA โดย  
ปล่อยให้เกิดการก่อการร้ายขึ้น ประเทศไทยจึงต้องค้นหาวิธีการถอดรหัสด้วยตนเองก่อนที่จะ  
เกิดเหตุร้ายขึ้น...

คุณ... ซึ่งเป็นความหวังของประเทศชาติ โปรดใช้ความสามารถของคุณ ถอดรหัสนี้ ก่อนที่  
มันจะสายเกินไป