

ข้อสอบ TUMSO ครั้งที่ 2 รอบที่ 2

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 5 กรกฎาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 ชมรมคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>



การแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระหว่างโรงเรียน ครั้งที่ 2 โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
สอบแข่งขันวิชาคณิตศาสตร์ รอบที่ 2

1. ให้ r, s, t เป็นรากจริงบวกที่ต่างกันทั้งสามของสมการ

$$x(x-2)(3x-7) = 2$$

จงหาค่าของ $\arctan r + \arctan s + \arctan t$

2. ให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ เป็นเซตของตัวอักษร
เราจะเรียก $x = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$ ว่า “คำรหัส” ที่มีความยาว 5 ถ้า $x_i \in A$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4, 5$
และเรียก $w(x)$ ว่า “น้ำหนัก” ของ x โดย $w(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
จงหาจำนวน “คำรหัส” ความยาว 5 ทั้งหมด ที่มี “น้ำหนัก” หารด้วย 3 ลงตัว

3. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนนับ
นิยาม ตัวดำเนินการ ลูกศรทรงพลัง $a \uparrow m$ ดังนี้

i) $a \uparrow 1 = a$ และ

ii) $a \uparrow (i+1) = a^{(a \uparrow i)}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, \dots$

(เช่น $4 \uparrow 3 = 4^{4^2} = 4^{16} = 4^{256}$ ซึ่งมี 155 หลัก)

สำหรับแต่ละจำนวนนับ k ให้ x_k แทนจำนวนจริงบวก (มีเพียงจำนวนเดียว) ที่เป็นคำตอบของสมการ

$$x \uparrow k = 10 \uparrow (k+1)$$

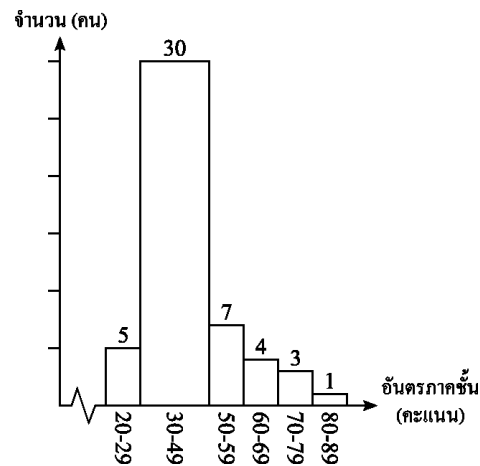
จงเปรียบเทียบว่าระหว่าง x_{42} และ x_{43} ว่าจำนวนใดมีค่ามากกว่า

4. ให้ $A = \left(\frac{a}{a+b}\right) + \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \dots + \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2547}$

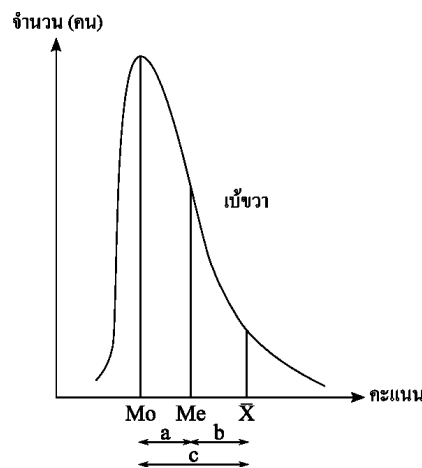
$$B = \left(\frac{b}{a+b}\right) + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^3 + \dots + \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2547}$$

โดยที่ $a^3 = b^3$ และ $a \neq b$ จงหาค่าของ $A + B$

5. จากการสำรวจคะแนนสอบวิชาชีววิทยาของนักเรียนที่เป็นคณะกรรมการ TUMSO 50 คน เป็นดังนี้



ซึ่งอาจเขียนเป็นเส้นโค้งความถี่ได้ดังนี้



จงหาค่าของ $a - b + c$ (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

6. กำหนด B เป็นเมตริกซ์สมมาตร และ C เป็นเมตริกซ์เสมิมิอนสมมาตร

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ถ้า } B + C = A \text{ และ}$$

$$BC = D^t \text{ เมื่อ } D = [d_{ij}]_{3 \times 3}$$

แล้วผลบวกค่า d_{ij} ที่เป็นจำนวนเต็มเท่ากับเท่าไร

7. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ซึ่ง $|z - 2 - 4i| = 3$
ถ้า a คือค่ามากที่สุดของ $|z - 5 - 10i|$ และ b คือค่าน้อยที่สุดของ $|z - 5 - 10i|$ แล้ว $a^2 + b^2$ มีค่าเท่าไร
8. กำหนดสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มี AB ขนานกับ CD , M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD , $\angle MCB = 150^\circ$, $BC = y$ และ $MC = x$
จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยม $ABCD$ ในรูปของ x, y

9. จงหาเลขสามหลักแรกของ $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$
10. นาย ก ทำการทดลองอย่างหนึ่ง โดยใส่ทรายปริมาณมากลงในขวดใบใหญ่ แล้วเททรายผ่านกรวยอันหนึ่งให้ลงสู่พื้นราบ โดยอัตราการไหลของทรายเป็น 10 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที และทรายที่ไหลลงมานี้กองเป็นรูปกรวย มีอัตราส่วนระหว่างความสูงต่อความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานเป็น 3:8
จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงความสูงของกองทราย เมื่อกองทรายสูง 4 เมตร
11. ให้ a_n แทนเลขหลักหน่วยของ $1 + 2 + 3 + \dots + n$
ตัวอย่างเช่น $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6$
จงหาค่าของ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$
12. จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$ ที่ $x = 1$ เมื่อ $y = \frac{u}{1 + \frac{u}{1 + \frac{u}{1 + \dots}}}$ และ $u = x^x$
โดยกำหนดให้ $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$