

ข้อสอบ TUMSO ครั้งที่ 4 รอบที่ 2
สอบวันที่ 17 มกราคม 2549

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 4 กรกฎาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 ชมรมคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>



การแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระหว่างโรงเรียน ครั้งที่ 4
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ประจำปีการศึกษา 2548
สอบแข่งขันวิชาคณิตศาสตร์ รอบที่ 2
วันอังคารที่ 17 มกราคม พ.ศ. 2549 เวลา 13.30 - 15.00 น.

1. จงหาค่าของ

$$100 \binom{100}{100} 2^{99} + 99 \binom{100}{99} 2^{98} + 98 \binom{100}{98} 2^{97} + \dots + \binom{100}{1}$$

2. จงหาค่าของ

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}(x+2)} dx$$

3. จงหาค่าของ

$$\int \frac{x^4 - 6}{x^5 + 2x} dx$$

4. จงหาค่า $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^n \theta - \sin^n \theta}{\cos^n \theta + \sin^n \theta} = -1$$

5. จงหาคำตอบในระบบจำนวนจริงของระบบสมการ

$$\begin{aligned} \sqrt{x(1-y)} + \sqrt{y(1-x)} &= \frac{1}{2} \\ \sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

6. เชือกเส้นหนึ่งยาว 37 หน่วย ปลายข้างหนึ่งมีสีแดง อีกข้างสีน้ำเงิน ต้องการนำเชือกมาขดเป็นสามเหลี่ยม ซึ่งมีความยาวด้านทั้งสามเป็นจำนวนเต็มบวก จะสามารถสร้างสามเหลี่ยมที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่รูป

7. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \text{adj}(A^t)$

จงหาผลรวมของสมาชิกทั้งหมดของ B

8. กำหนด $a_n = \frac{4(n+2)}{n(n+1)(n+3)}$ ค่าของ S_t เท่ากับเท่าใด

9. จงหาคำตอบซึ่งเป็นจำนวนจริงบวกของระบบสมการ

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

$$ac - bd = \frac{1}{2}$$

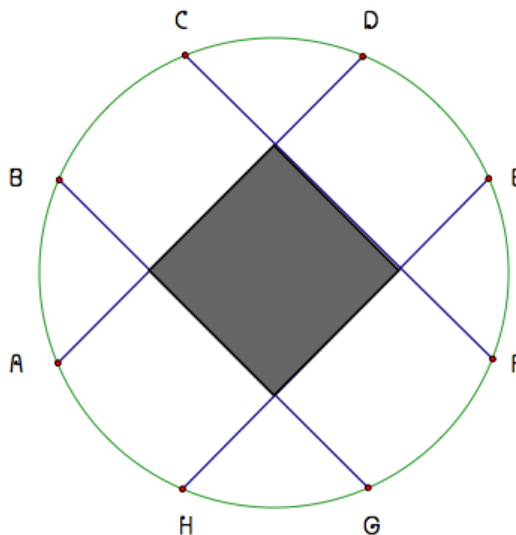
$$ad - bc = \frac{1}{2}$$

10. กำหนด a, b, c เป็นความยาวด้าน และ A, B, C เป็นมุมทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC

ถ้า $a + b + c = 10(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$, $\sin A + \sin B = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

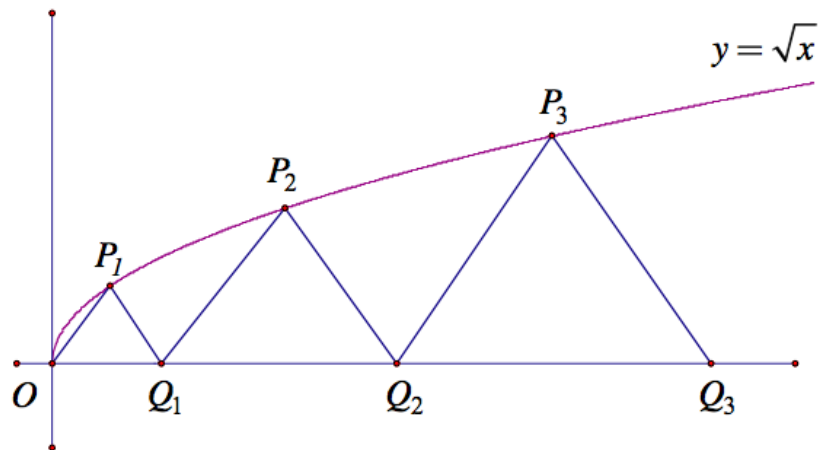
และ $\cos A + \cos B = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ แล้ว $a^2 + b^2 + c^2$ มีค่าเท่าใด

11. แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 8 ส่วนเท่าๆกัน ด้วยจุด A, B, C, D, E, F, G, H ดังรูป



จงหา อัตราส่วนของพื้นที่ที่แรเงาและพื้นที่วงกลม

12. กำหนดจุดดังแสดงในรูป



$OP_1Q_1, Q_1P_2Q_2, Q_2P_3Q_3, \dots, Q_7P_8Q_8$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า ที่มีด้านยาว $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ ตามลำดับ

จงหาค่าของ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8$