

ข้อสอบ TUMSO ครั้งที่ 5 รอบที่ 1
สอบวันที่ 9 มกราคม 2550

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 1 กรกฎาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 ชมรมคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>

TUM5th O

การแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระหว่างโรงเรียน ครั้งที่ 5 โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
สอบแข่งขันวิชาคณิตศาสตร์ รอบที่ 1

ตอนที่ 1 ให้กากบาทคำตอบที่ถูกต้องเพียงข้อเดียวในกระดาษคำตอบ หากไม่มีข้อใดถูกต้อง
ให้ตอบ ฮ (ข้อ 1-7 ข้อละ 3 คะแนน)

1. กำหนด $f(x) = \frac{a+b}{P(x)+c} + \frac{a-b}{P(x)-c}$ เมื่อ $P(x)$ เป็นพหุนามที่มีสมบัติว่า $P'(x) = 1$
สำหรับทุกจำนวนจริง x และ $f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 3, f(5) = 5$ โดยที่ a, b, c
เป็นจำนวนจริง จงหาเศษจากการหาร $(P(x))^2 + P(x) + 1$ ด้วย $x + \frac{b}{c} + a$
ก. -3 ข. -2 ค. -1 ง. 0 จ. 1 ฉ. 2 ช. 3

2. ให้ P เป็นจุดบนระนาบซึ่ง เส้นสัมผัสวงกลมรัศมี R จากจุด P ยาว l จากจุดสัมผัสของเส้น
สัมผัสจากจุด P ลากเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางวงกลมดังกล่าวไปพบวงกลมที่จุด Q ส่วน
ของเส้นตรง PQ ตัดวงกลมที่จุด R ด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้าน
ประกอบมุมฉากยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง PQ และ PR เท่ากับเท่าใดในเทอมของ R
และ l

ก. $\sqrt{\frac{l^4+4R^2l^2}{4R^2+l^2}}$ ข. $\sqrt{\frac{l^4+16R^4}{4R^2+l^2}}$ ค. $\sqrt{\frac{16R^4+4R^2l^2}{4R^2+l^2}}$
ง. $\sqrt{\frac{2l^4+8R^2l^2+16R^4}{4R^2+l^2}}$ จ. $\sqrt{\frac{l^4+8R^2l^2+32R^4}{4R^2+l^2}}$ ฉ. $\sqrt{\frac{l^4+12R^2l^2+16R^4}{4R^2+l^2}}$
ช. $\sqrt{\frac{l^4+8R^2l^2+16R^4}{4R^2+l^2}}$

3. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีผลบวกของกำลังสองของความยาวแต่ละด้านเท่ากับ $\sqrt{2007}$
จงหาค่าของ $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}$

ก. $\sqrt{2007}$ ข. $\frac{\sqrt{2007}}{2}$ ค. $\frac{2}{\sqrt{2007}}$ ง. $2\sqrt{2007}$
จ. 2007 ฉ. $\sqrt[4]{2007}$ ช. $\sqrt{\frac{2007}{2}}$

4. ข้อใดถูกต้องบ้าง

a. สมการ $4x^5 - 26x^4 + 39x^3 - 16x^2 - 3x + 2 = 0$ มีรากที่ไม่เป็นจำนวนจริง

b. $\gcd(a, b) = \text{imf} \{|ax + by| \mid x, y \in I\}$

c. $\arcsin x + \arccos(x + 1) = \frac{\pi}{3}$ มีจำนวนคำตอบเท่ากับ $\arccos x + \arcsin(x + 1) = \frac{\pi}{3}$

ก. a ข. b ค. c ง. a,b จ. b,c ฉ. c,a ช. คำตอบเป็นอย่างอื่น

5. กล่องใบหนึ่งมีลูกกวาดสีแดง, เขียว, ขาว โดยความน่าจะเป็นที่เมื่อหยิบลูกกวาด 1 เม็ดแบบ
สุ่มแล้วได้สีแดงหรือเขียวเท่ากับ $\frac{2}{3}$ ความน่าจะเป็นที่เมื่อหยิบลูกกวาด 1 เม็ดแบบสุ่มแล้ว

ได้สีแดงเท่ากับ $\frac{3}{7}$ จงหาความน่าจะเป็นที่เมื่อหยิบลูกกวาด 1 เม็ดแบบสุ่มแล้วได้สีแดงหรือขาว

- ก. $\frac{3}{35}$ ข. $\frac{6}{35}$ ค. $\frac{14}{35}$ ง. $\frac{15}{35}$ จ. $\frac{20}{35}$ ฉ. $\frac{21}{35}$ ช. $\frac{29}{35}$

6. ให้ p, q, r, s, t, u เป็นประพจน์ เมื่อเขียนค่าความจริงของประพจน์ $((p \rightarrow q) \wedge r) \rightarrow (s \leftrightarrow \sim t) \vee (u \rightarrow r)$ ลงในตารางค่าความจริง จะมีบรรทัดที่มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมดกี่บรรทัด

- ก. 2 ข. 64 ค. 16 ง. 32 จ. 8 ฉ. 48 ช. 4

7. กำหนดข้อมูลของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (x) และวิชาฟิสิกส์ (y) ดังนี้

x	96	95	98	96	98
y	95	86	91	92	94

โดยให้ x, y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นเส้นตรง

ให้ l_1 เป็นเส้นตรงแสดงผลของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อวิชาฟิสิกส์

l_2 เป็นเส้นตรงแสดงผลของคะแนนวิชาฟิสิกส์ที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

ถ้า l_1, l_2 ตัดกันที่ (a,b) แล้วผลต่างของค่ามาตรฐานระหว่างข้อมูลที่เป็นเปอร์เซ็นต์ที่ a และ b ในข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติเป็นเท่าใด เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานดังนี้

z	0.675	0.707	0.74	0.773	0.806	0.84	0.877	0.915	0.955	0.995	10.37	1.08
A	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36
z	1.126	1.175	1.227	1.28	1.34	1.405	1.475	1.555	1.645	1.75	1.88	2.055
A	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48

- ก. 0.39 ข. 0.40 ค. 0.41 ง. 0.42 จ. 0.43 ฉ. 0.44 ช. 0.45

ตอนที่ 2 จงเขียนเฉพาะคำตอบลงในกระดาษคำตอบ (ข้อ 8-18 ข้อละ 4 คะแนน)

8. วงกลมวงหนึ่งกำหนดโดยสมการ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 50 - 25\sqrt{3}$ ผ่านจุด $A(2007, 2550)$, $B(2003, 2547)$, $C(m, n)$ จงหาขนาดของมุม \hat{ACB} ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

9. ให้ U เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $(3 - |z - 3 - 2i|)|z - i| = 0$

จงหาผลคูณสมาชิกใน $S = \left\{ |z + 3 - 2i| \mid z \in U, \frac{z+3-2i}{6-2i} \in R \right\}$

10. จงหาว่าชุดจำนวนเต็มบวก (a, b, c) ทั้งหมดซึ่ง $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$ มีทั้งหมดกี่ชุด อะไรบ้าง

11. ให้ $S = \{a, b, c\}$ เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\log x^2 - \log 3600 + \log_x 144 - \log 4 \cdot \log_x 2 - \log_x 6 \cdot \log_x 4 + \log 36 \cdot (\log_x 2)^2 = 0$$

จงหาค่าของ $a + b - c$ ทั้งหมดที่เป็นไปได้

12. ให้ $\vec{x} = -3\vec{i} + 4\vec{k}$, $y = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $z = \vec{j} - 5\vec{k}$ และ $\vec{u} = 3\vec{x} + 4\vec{y} + 2\vec{z}$,
 $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$

ถ้า \vec{w}_1 เป็นเงาของเวกเตอร์ \vec{u} บน \vec{v} และ \vec{w}_2 เป็นเงาของเวกเตอร์ \vec{v} บน \vec{u} แล้วจงหาค่าของ $|\vec{w}_1 \times \vec{w}_2|$

13. ลากเส้น AD แบ่งครึ่งมุมภายในสามเหลี่ยม ABC พบ BC ที่ E และพบเส้นตรงที่สัมผัสวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABE ที่ B ที่ F ต่อบน AB พบ CF ที่ G ถ้า $D\hat{G}C + A\hat{B}C = A\hat{C}B + F\hat{A}C$ จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ \vec{AC} และ \vec{DG} ในเทอมของ $A\hat{B}C, B\hat{A}C$

14. จงหาค่าของ $\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) \binom{n}{i}$ ในเทอมของ n

15. จงหาค่าของ $\int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \arctan \left(\frac{1}{2i^2} \right) \right) dx dy dz$

16. กำหนดให้ $S = \{(x, y, z) \in I \times I \times I \mid x^2 + y^2 + z^2 + 3 < xy + 3y + 2z\}$,

$D = \{xy + z \mid (x, y, z) \in S\}$

ถ้า $k - \sum_{i=1}^{2550} \frac{(i+1)^2 + 1}{(i+1)^2 - 1} + 2551$ เป็นสมาชิกของ D

จงหาค่าของ $\frac{a^2(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}$

17. ถ้าจำนวนเต็มบวก m หาร 3684 และ 7752 แล้วเหลือเศษเป็น p และ $3p$ ตามลำดับ ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาค่าของ $m + p$ ทั้งหมดที่เป็นไปได้

18. ในวันก่อนสอบ TUM5thO ปรากฏว่าอาหารที่เก็บไว้ในห้องพักแห่งหนึ่งแฉวยเอกมัยถูกขโมยไป หลังจากนั้นได้พบผู้ต้องสงสัย 5 ราย ซึ่งเป็นเพื่อนกัน คือ Ic, St, Ga, Ju, Bo โดยเพื่อไม่ให้ผู้สอบสวนคิดว่าผู้ที่พูดเท็จต้องเป็นขโมย ทั้ง 5 คน จึงพูดความจริงรวมกันมากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ ถามว่า มีประโยคคำพูดที่เป็นจริงทั้งหมดกี่ประโยค และ ใครเป็นขโมย เมื่อผู้ต้องสงสัยทั้งห้าพูดดังนี้

ผู้ต้องสงสัย	ประโยคที่ 1	ประโยคที่ 2
Ic	ผมไม่ได้ขโมย	ประโยคแรกที่ Ga พูดไม่จริง
St	Bo ไม่ได้ขโมย	ประโยคแรกที่ Ic พูดไม่จริง
Ga	St หรือ Ju ขโมย	St ขโมย
Ju	St พูดจริง	Ic ขโมย
Bo	Ga พูดจริง	ประโยคแรกที่ Ju พูดจริง

ตอนที่ 3 จงเขียนเฉพาะคำตอบลงในกระดาษคำตอบ (ข้อ 19-25 ข้อละ 5 คะแนน)

19. กำหนดข้อมูลทางสถิติ 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, ..., $n - 1, n, n$ โดยที่ $2 \mid n$ และให้ m เป็นมัธยฐานของข้อมูลชุดนี้ ค่ามาตรฐานของ m มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{146}}$ จงหาค่าของ $m + n$

20. ให้ $A = \{0, 1, 2, \dots, 2550\}$ จงหาจำนวนวิธีเลือกสมาชิกสี่ตัว a, b, c, d จากเซต A โดยที่ $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 2007$ หารด้วย 7 ลงตัว

21. ให้ a_1, a_2, a_3, \dots เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกที่กำหนดโดยสมการ

$$a_{n+2} = \begin{cases} \frac{4a_{n+1}^3 + 9a_{n+1}a_n^2}{12a_n^2}, & 2a_{n+1} \leq 3a_n \\ \sqrt{\frac{12a_{n+1}^3 - 9a_n a_{n+1}^2}{4a_n}}, & 2a_{n+1} > 3a_n \end{cases} \quad \text{สำหรับทุก } n = 1, 2, 3, \dots \text{ และ}$$

$$a_1 = 30, a_2 = 80 \text{ สมมติว่า } b_i = \frac{a_i}{3a_{i-1}} \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } i \geq 2$$

จงหาลำดับ b_2, b_3, b_4, \dots เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก และถ้าลู่เข้า จงหาขีดจำกัดของลำดับ

22. กำหนด $f(x) = \begin{bmatrix} x & 2 & -1 \\ x+1 & -x^2 & 3 \\ x & 2x & -2 \end{bmatrix},$

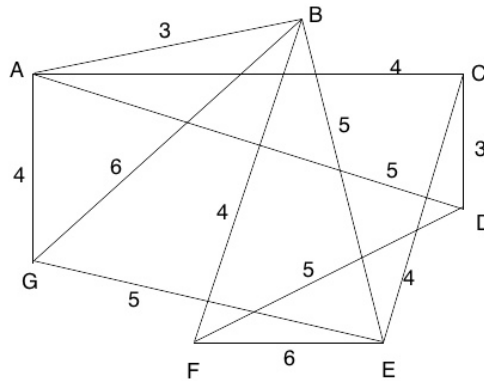
$$g(x) = \text{หรม. ของ } x \text{ กับ } 210,$$

$$h(x) = \text{เศษจากการหาร } x \text{ ด้วย } 20,$$

$$i(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{5}{7}$$

$$\text{จงหาค่าของ } n(P(\{h(g(\det(f(x)) - i'(x))) \mid x \in R_h\}))$$

23. จังหวัดหนึ่งมีถนนเชื่อมระหว่างอำเภอ A, B, C, D, E, F, G แทนด้วยกราฟ Z มีระยะทางระหว่างอำเภอ ดังรูป



ให้ H เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟ Z มีผลรวมค่าน้ำหนักเท่ากับ a

P_1 เป็นวิถีที่สั้นที่สุดจากอำเภอ A ไปอำเภอ E มีระยะทาง x

P_2 เป็นวิถีที่ยาวที่สุดจากอำเภอ A ไปอำเภอ E มีระยะทาง y

กราฟ Y เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีจุดยอด $|a - x|$ จุด เส้นเชื่อม $2y$ เส้น ที่ไม่มีวงวน

จงหาจำนวน คู่ของเส้นเชื่อมขนาน ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ของกราฟ Y

24. ให้วงกลม 3 วงจุดศูนย์กลางที่จุด A, B, C ตามลำดับ มีจุดร่วมคือจุด $(0, 3)$ และเส้นสัมผัสร่วมคือ $y + 1 = 0$ ถ้า $A(x, y)$ เป็นจุดในระนาบ XY ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $\frac{(y-3)^{2549}(y-1)}{(x+4)^{2006}(3-y)} \geq 0$, B อยู่ในจุดภาคที่ 1 ซึ่งระยะระหว่าง A และ B เท่ากับ 3 หน่วย และ เซตของจุด $C(a, b)$ เป็นความสัมพันธ์จาก $\{-6\sqrt{2}\}$ ไปยังเซตของจำนวนจริง จงหาสมการเส้นตรง BC
25. พฤติกรรมของสัตว์ชนิดหนึ่งเป็นแบบมีทิศทางแน่นอน (Taxis) โดยสัตว์ชนิดนี้จะบินทำมุม $\theta \neq 90^\circ$ กับทิศทางของแสงเข้าหาแหล่งกำเนิดแสง สมมติว่าตอนเริ่มต้น สัตว์ชนิดนี้อยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดแสง d เมตร จงหาระยะทางที่สัตว์ชนิดนี้บินได้ก่อนถูกไฟไหม้เมื่อถึงแหล่งกำเนิดแสง