

ข้อสอบ TUMSO ครั้งที่ 5 รอบที่ 2
สอบวันที่ 9 มกราคม 2550

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 1 กรกฎาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 ชมรมคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>

TUM5th O

การแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระหว่างโรงเรียน ครั้งที่ 5 โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
สอบแข่งขันวิชาคณิตศาสตร์ รอบที่ 2

1. พิจารณาแผนภาพดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 5 & 5 & \\ 3 & 0 & 7 & 8 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 1 & 9 & 2 & \\ 6 & 7 & 1 & 4 & 0 & 6 \end{array}$$

ข้อมูลชุดที่ 1

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 7 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & \\ 5 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 7 & 2 \end{array}$$

ข้อมูลชุดที่ 2

จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใดมีค่ามากกว่ากันและมากกว่าอยู่เท่าไร

2. วงรีมีจุดปลายแกนเอกและปลายแกนโทคือจุด $(-5, 0)$ และ $(0, -3)$ มีจุดโฟกัสคือ $F_1(f_1, g_1)$, $F_2(f_2, g_2)$ โดยที่ $f_1 + g_2 > f_2 + g_1$ ไฮเพอร์โบลาคู่ศูนย์กลางที่ F_1 และมีจุดโฟกัสจุดหนึ่งคือ F_2 ตัดวงรี 3 จุด คือ $A, B, C(m, n)$ โดยที่ $m - |n| \geq 3$ พาราโบลาคู่ยอดที่จุด $(\frac{3}{2}, 0)$ และมีสมการเส้นไดเรกตริกซ์คือ $x = m + f_2 + \frac{f_1}{2} - g_1$

จงหาสมการของพาราโบลาดังกล่าว

3. สามเหลี่ยม ABC มีจุด D, E อยู่บนด้าน BC โดยที่ D อยู่ระหว่าง B, E ถ้า $\hat{BAD} = \hat{CAE}$, $BD = 3$, $DE = 1$, $AB = 8$, $AC = 10$ จงหา $CD : BE$

4. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{(x-1)^3+19} - \sqrt{8(x-1)^2-5(x-1)-31}}{\sqrt{3x^2-4x+108} - \sqrt{15x+18} - \sqrt{3x-6}}$

5. ในการเลือกสีมาระบาย icosahedron ซึ่งเป็นรูปทรงที่มี 20 หน้า แต่ละหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จากสีทั้งหมด 7 สี ได้แก่ สีม่วง สีคราม สีน้ำเงิน สีเขียว สีเหลือง สีแสด และสีแดง โดยใช้สีจำนวนน้อยที่สุดที่ทำให้หน้าที่อยู่ติดกัน (มีด้านร่วมกัน) มีสีแตกต่างกัน จะมีวิธีการเลือกสีมาระบายได้ทั้งหมดกี่วิธี

6. กำหนดข้อมูลเชิงปริมาณทั้งหมด 3 ข้อมูลที่มีผลบวกของกำลังสามค่ามาตรฐานของทั้งสามข้อมูลเท่ากับ 1.875 จงหาผลบวกของกำลังสี่ของค่ามาตรฐานของทั้งสามข้อมูล

7. กำหนดให้ $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta + \sin \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha} = \int_a^b f(x) dx$ เมื่อ $\alpha = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

จงหาค่าของ $\int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f(cx) dx$ ในเทอมของ α, c

8. ยานอวกาศจอดอยู่บนดาวเคราะห์ซึ่งเมื่อสังเกตจากทุ่งหญ้าอันกว้างขวางสุดลูกหูลูกตาบนเส้น
 ทropicออฟแคนเซอร์มีมุมอาซิมุต 135 องศา มุมเงย 15 องศา ห่างจากโลก 0.2 หน่วยดาราศาสตร์
 สามารถบินไปยังดาวซินโดรมได้โดยมีเงื่อนไขที่ว่าต้องบินตรงเท่านั้นและต้องใกล้โลกมาก
 ขึ้นเรื่อยๆตลอดระยะทางที่มา จงหาปริมาตรทรงตันที่ดาวซินโดรมสามารถอยู่ได้ (กำหนด
 1 หน่วยดาราศาสตร์เท่ากับ 150 จิกะเมตรหรือ $1.5 \times 10^{11}m$)
9. กำหนด $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ โดยที่ $a_{ij} = j^{i-1}$,
 $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ โดยที่ $b_{ij} = \sin^i x \cdot \cos^j x$ และ
 $S_n =$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเมตริกซ์ $A^{-1}B$
 จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ เมื่อ $\theta = \arg(20 + 21i)$
10. ให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบได้ โดยมี EC และ ED เป็นเส้นสัมผัสวงกลม
 ที่จุด C และ D ตามลำดับ. ให้ F เป็นจุดตัดของ AC และ BD . ให้ G เป็นจุดบนส่วน
 ของเส้นตรง FC . ลาก GH ขนานกับ CD ตัด EC ที่จุด H . วงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม
 ADG ตัดวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม BCH ที่ I และ J . เส้นตรง IJ ตัด CD ที่ K . ถ้า
 $\hat{IFB} = 42^\circ$, $\hat{IKD} = 100^\circ$, $\hat{CAD} = 63^\circ$. จงหาขนาดของมุม \hat{CAB}
11. จงหาค่าของ $\frac{2\sqrt{3} \cos 50^\circ + 3}{\tan 50^\circ \tan 100^\circ} + 2(\cos 100^\circ + \cos 200^\circ)$
12. กำหนดวงรี E โฟกัสที่ $F(-1, -1)$, $G(3, 5)$ มีความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{\sqrt{13}}{5}$. เส้นตรง
 l_1 ผ่านจุด F ขนานแกน Y และเส้นตรง l_2 ผ่านจุด G ขนานแกน X . ถ้า $P(a, b)$, $Q(c, d)$
 เมื่อ $a > 3$, $d < -1$ เป็นจุดที่เส้นตรง l_2 , l_1 ตัดวงรี E ตามลำดับ จงหา $|PQ| + |PG| + |QF|$
13. ให้ $\prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^n 2^i \cdot 3^{kj} \right) = \left(\frac{32}{318} \right)^{10}$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม จงหาค่าของ $n(k-1)(m+1)$
 ทั้งหมดที่เป็นไปได้ (หมายเหตุ: กำหนด $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$)
14. จงหาเลข 3 หลักสุดท้ายของ $4^3 - 1^3 + 8^3 - 3^3 + 12^3 - 5^3 + \dots + 4012^3 - 2005^3$
15. พิจารณา $A = \begin{bmatrix} a+b & a+3b & 3a+5b \\ ab & 2ab & 4ab \\ a & a+b & 3a+b+c \end{bmatrix}$ เมื่อสุ่มเลือก a, b, c
 จากเซต $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ จงหาความน่าจะเป็นที่ทำให้ $\det A > 0$