

ข้อสอบ TUMSO ครั้งที่ 6 รอบที่ 1
สอบวันที่ 4 ธันวาคม 2550

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 18 พฤษภาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 ชมรมคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>

TUMS6TH

การแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระหว่างโรงเรียน ครั้งที่ ๖ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
สอบแข่งขันวิชาคณิตศาสตร์ รอบที่ ๑ วันอังคารที่ ๔ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๐

คำชี้แจง

- ข้อสอบมีทั้งหมด ๒๕ ข้อ คะแนนรวม ๑๐๐ คะแนน แบ่งเป็น ๓ ตอน ได้แก่
ตอนที่ ๑ เป็นข้อสอบปรนัยจำนวน ๗ ข้อ คะแนนข้อละ ๒.๕ คะแนน รวม ๑๗.๕ คะแนน
ตอนที่ ๒ เป็นข้อสอบอัตนัยเต็มเฉพาะคำตอบ จำนวน ๑๑ ข้อ คะแนนข้อละ ๔ คะแนน
รวม ๔๔ คะแนน
ตอนที่ ๓ เป็นข้อสอบอัตนัยเต็มเฉพาะคำตอบ จำนวน ๗ ข้อ คะแนนข้อละ ๕.๕ คะแนน
รวม ๓๘.๕ คะแนน
- มีเวลาในการทำข้อสอบ ๒ ชั่วโมง ๓๐ นาที ตั้งแต่เวลา ๙.๐๐ - ๑๑.๓๐ น.
- ไม่อนุญาตให้เปิดข้อสอบก่อนได้รับอนุญาตจากกรรมการคุมสอบ
- ใช้ปากกาสีน้ำเงินหรือดำเท่านั้นในการตอบ
- ผู้เข้าแข่งขันสามารถทดลองในข้อสอบและสามารถนำข้อสอบกลับไปได้
- เพื่อประโยชน์ของผู้เข้าสอบ กรุณากรอกข้อมูลลงในกระดาษคำตอบให้ครบถ้วนและชัดเจน
- เมื่อหมดเวลาสอบให้วางปากกาและคว่ำกระดาษคำตอบไว้บนโต๊ะแล้วออกจากห้องสอบทันที
ถ้าจะส่งก่อนหมดเวลาให้ยกมือขึ้นเหนือศีรษะเพื่อให้กรรมการคุมสอบมาเก็บกระดาษคำตอบ
- หากมีข้อสงสัยเกี่ยวกับคำชี้แจงให้ยกมือขึ้นเหนือศีรษะเพื่อสอบถามจากกรรมการคุมสอบ
- ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณทุกชนิดและห้ามทุจริตในการสอบ
- คำตัดสินของคณะกรรมการจัดสอบถือเป็นข้อยุติ

การตอบข้อสอบในกระดาษคำตอบ

- ตอนที่ ๑ ให้กากบาทคำตอบที่ถูกต้องเพียงข้อเดียวในกระดาษคำตอบ
- ตอนที่ ๒ และ ๓ ให้เขียนตอบลงในช่องว่างแต่ละข้อตามที่กำหนดไว้ให้ โดยให้ตอบในรูปที่
ง่ายที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ ข้อสอบบางข้อจะมีคำชี้แจงในการตอบ ให้ปฏิบัติตามคำชี้แจงนั้น
อย่างเคร่งครัด ให้เขียนคำตอบอย่างชัดเจน และถูกต้องตามหลักคณิตศาสตร์

ข้อตกลงในข้อสอบ

- Z^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก ซึ่งหมายถึงเซต $\{1, 2, 3, \dots\}$
- เศษส่วนอย่างต่ำ หมายถึง จำนวนในรูป $\frac{m}{n}$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็ม
บวก โดยที่หรม.ของ m และ n เป็น 1

7. เมื่อพิจารณาตารางค่าความจริงของประพจน์

$$[(p \rightarrow q) \vee (r \wedge s)] \leftrightarrow [t \rightarrow (u \vee p)]$$

จะมีกี่บรรทัดที่เป็นจริง

ก. 36

ข. 40

ค. 44

ง. ข้อ ก. ข. และ ค. ผิด

ตอนที่ 2 จงเขียนเฉพาะคำตอบลงในกระดาษคำตอบ (ข้อ 8-18 ข้อละ 4 คะแนน)

8. ให้ m เป็นคอร์ดร่วมของวงกลม $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ และ $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 169$

จงหาสมการของวงกลมซึ่งมี m เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

(ตอบในรูป $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r$ โดยที่ h, k, r เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

9. จงหาค่าของ $\frac{2 \cos 40^\circ + 1}{2 \tan^2 40^\circ} - 3 \cos 40^\circ$ (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

10. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก

เส้นตรง k สัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 = 2a^2$ และสัมผัสพาราโบลา $y^2 = 8ax$

จงหาสมการของ k ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (ตอบในรูป $y = mx + c$)

11. จุด F และจุด E เป็นจุดบนด้าน AB และ CD ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ ตามลำดับ โดยที่สี่เหลี่ยม $AFCE$ เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ถ้าด้าน AB ยาว 16 หน่วย และด้าน BC ยาว 12 หน่วยแล้ว จงหาความยาวของส่วนของเส้นตรง EF

12. นักเรียน 20 คนนั่งรอบโต๊ะกลม ครูต้องการเลือกนักเรียน 8 คนไปช่วยงาน โดยที่ในนักเรียนกลุ่มที่ถูกเลือก ไม่มี 2 คนใดที่นั่งติดกัน จงหาว่าครูจะสามารถเลือกได้กี่วิธี

13. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และกำหนดให้ $\sum_{i=0}^n g^i = \binom{k}{2}$

จงหาค่าของ k ในรูป n

14. จงหาคู่อันดับ (x, y) ของจำนวนจริงทั้งหมด ซึ่งสอดคล้องสมการ

$$(x^2 + y^2 - 4)^2 (xy - 1)^2 + \sqrt{y^2 - x^2} = 0$$

15. ให้ a, b, c, d, x, y, z, u เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a, b, c, d, x, y, z, u \notin \{-1, 0, 1\}$ และ $ax + by + cz + du \neq 0$

สมมติว่า $x = by + cz + du, y = cz + ax + du, z = ax + by + du, u = ax + by + cz$

$$\text{ให้ } S = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d}$$

จงหาค่า $7S^2$

16. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3(b-c)(a-b)$ และ $a, b, c \leq 5$ จงหาจำนวนของสามสิ่งอันดับ (a, b, c) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

17. จงหาเซตของจำนวนจริงซึ่ง จำนวนจริง a เป็นสมาชิกของเซตนี้ ก็ต่อเมื่อ อสมการ $\sqrt{4+3x} \geq x+a$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนเต็ม
18. ในสี่เหลี่ยมมุม $ABCD$ เราทราบว่า $\hat{BAD} = \hat{BC} = 60^\circ$, ด้าน AD ยาว 50, ด้าน DC ยาว 25 และด้าน CB ยาว 30
 จงหา $|\vec{AB} \times \vec{AD}|$
 (สี่เหลี่ยมมุม หมายถึง สี่เหลี่ยมที่เมื่อลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดยอด 2 จุดใดๆ ทุกจุดบนส่วนของเส้นตรงนั้นจะไม่อยู่นอกสี่เหลี่ยมนั้น)

ตอนที่ 3 จงเขียนเฉพาะคำตอบลงในกระดาษคำตอบ (ข้อ 19-25 ข้อละ 5.5 คะแนน)

19. จงหาจำนวนคู่อันดับ (x, y) ของจำนวนจริง ซึ่ง $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ และ $\sin x + \sin y = \sin(xy)$

20. ให้ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ เป็นรากทั้ง 6 ของพหุนาม

$$P(x) = x^6 - (4 + \sqrt{3})x^5 + (4\sqrt{3} + 1)x^4 + 4x^3 - (32 + 8\sqrt{3})x^2 + (8 + 32\sqrt{3})x - 32$$

สมมติว่า $\sum_{i=1}^6 (\arg(x_i))^4 = k\pi^4$ จงหาค่า k

(พิจารณาเฉพาะค่า \arg ที่อยู่ในช่วง $[0, 2\pi)$ และให้ตอบในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ)

21. ให้ $a, b, c, d, a', b', c', d'$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a, b, a', b' \neq 0$, $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$, $c \neq d$ และ $c' \neq d'$
 สมมติว่า เส้นตรง $ax+by+c=0$, $ax+by+d=0$, $a'x+b'y+c'=0$ และ $a'x+b'y+d'=0$
 ปิดล้อมพื้นที่สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

จงหาค่าของ $\frac{c-d}{c'-d'}$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (ตอบในรูปของ a, b, a', b')

22. ฐานันดรมีกล่องลูกบาศก์ 10^6 กล่อง นรุตม์ทราบว่าฐานันดรต้องการจะนำกล่องทั้ง 10^6 กล่อง มาประกอบกันเป็นลูกบาศก์ขนาด $100 \times 100 \times 100$ โดยที่ทั้งกล่องเป็นสีขาวเมื่อมองจากด้านนอก นรุตม์ไม่ต้องการให้ฐานันดรประกอบได้สำเร็จ ระหว่างที่ฐานันดรไม่อยู่บ้าน นรุตม์จึงเอาสีดำมาทากล่องของฐานันดร อยากทราบว่านรุตม์จะต้องทาอย่างน้อยกี่หน้า จึงจะมั่นใจได้ว่า เมื่อฐานันดรกลับมาบ้านเขาจะไม่มีโอกาสประกอบกล่องได้สำเร็จตามต้องการ

23. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ให้ $f(n)$ เป็นผลบวกของเลขโดดในหลักคี่ของ n ให้ $g(n)$ เป็นผลบวกของเลขโดดในหลักคู่ของ n (การนับหลักจะนับจากขวาไปซ้าย) และให้ $h(n) = f(n) - g(n)$

(เช่น $n = 245346$ จะได้ $f(n) = 4 + 3 + 6 = 13$, $g(n) = 2 + 5 + 4 = 11$ และ $h(n) = f(n) - g(n) = 13 - 11 = 2$)

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a + c + 2b & b & c + 2b \\ c + b + 2a & a & b + 2a \\ c - a & c - a & 2c - a - b \end{bmatrix}$$

ให้ N เป็นจำนวนของสามสิ่งอันดับ (a, b, c) ซึ่ง a, b, c เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $-2007 \leq a < b < c \leq 2007$ และทำให้ $\det A > 0$

จงหา $h(N)$

24. จงหาผลบวกของจำนวนสี่หลัก m ทั้งหมดซึ่งน้อยกว่า 2007 และมีจำนวนเต็มบวก $n < m$ ซึ่ง $m - n$ มีตัวหารบวกอย่างมาก 3 ตัว และ mn เป็นกำลังสองสมบูรณ์
25. ให้ a เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุดที่ทำให้ สำหรับจำนวนจริง x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ใดๆ
 เรามีว่า $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5)$
 จงหาค่า a^2 (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)