

ข้อสอบ TUMSO ครั้งที่ 6 รอบที่ 2
สอบวันที่ 4 ธันวาคม 2550

ปรับปรุงครั้งล่าสุดวันที่ 18 พฤษภาคม 2552

© สงวนลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2552 ชมรมคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ต่อได้ ภายใต้สัญญาอนุญาตครีเอทีฟคอมมอนส์แบบแสดงที่มา-ไม่ใช้
เพื่อการค้า-อนุญาตแบบเดียวกัน 3.0 ประเทศไทย

ดาวน์โหลดฉบับปรับปรุงครั้งล่าสุดได้จาก <http://www.kukkai.org>

TUMS6TH

การแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระหว่างโรงเรียน ครั้งที่ ๖ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
สอบแข่งขันวิชาคณิตศาสตร์ รอบที่ ๒ วันอังคารที่ ๔ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๐

คำชี้แจง

- ข้อสอบนี้เป็นข้อสอบแข่งขันวิชาคณิตศาสตร์รอบที่ ๒ ในการแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระหว่างโรงเรียน ครั้งที่ ๖ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
- การแข่งขันรอบที่ ๒ มีทั้งหมด ๑๐ ข้อ ทำทีละ ๑ ข้อ คะแนนข้อคือข้อละ ๒ คะแนน ข้อคู่ข้อละ ๓ คะแนน
- เวลาในการทำข้อสอบแต่ละข้อจะแจ้งให้ทราบก่อนได้รับโจทย์ และมีกำหนดไว้ในกระดาษคำตอบแล้ว
- การตอบข้อสอบให้ตอบในช่องที่กำหนดไว้ให้ ส่วนบริเวณอื่นสามารถใช้เป็นพื้นที่สำหรับทด
- ในแต่ละข้อให้เขียนชื่อโรงเรียนลงในช่องที่กำหนดไว้ให้ด้านบนอย่างชัดเจน มิฉะนั้นจะไม่ได้รับการตรวจในข้อนั้น
- เมื่อแข่งขันครบ ๑๐ ข้อแล้ว ถ้ามีทีมใดได้คะแนนเท่ากันและเป็นอันดับที่ ๑, ๒ หรือ ๓ จะต้องแข่งขันในคำถามสำรอง ซึ่งจะทำให้การแข่งขันที่ละข้อ โดยในแต่ละข้อ จะมีเวลาที่กำหนดไว้ในโจทย์ แต่ผู้เข้าแข่งขันสามารถยกมือเพื่อส่งคำตอบก่อนเวลาได้ โดยถ้ามีทีมที่ตอบถูกมากกว่า ๑ ทีม ทีมที่ส่งก่อนจะถือว่าทำได้ดีกว่าในข้อนั้น ถ้ายังมีทีมที่ทำได้ดีเท่ากัน จะต้องใช้คำถามสำรองข้อต่อไป จนเมื่อคำถามสำรองหมด จะถือว่าทีมที่มีคะแนนรวมในรอบแรกดีกว่าทำได้ดีกว่า ถ้ายังเท่ากันอีก จะถือว่าทีมที่มีผลต่างของคะแนนของผู้เข้าแข่งขันทั้งสองมากกว่าทำได้ดีกว่า และถ้ายังเท่ากันอีก จะใช้วิธีจับฉลาก

การตอบข้อสอบในกระดาษคำตอบ

- ให้เขียนตอบลงในช่องว่างแต่ละข้อตามที่กำหนดไว้ให้ โดยให้ตอบในรูปที่ง่ายที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ ข้อสอบบางข้อจะมีคำชี้แจงในการตอบ ให้ปฏิบัติตามคำชี้แจงนั้นอย่างเคร่งครัดให้เขียนคำตอบอย่างชัดเจน และถูกต้องตามหลักคณิตศาสตร์
- ในการตอบไม่จำเป็นต้องใส่หน่วย

ข้อตกลงในข้อสอบ

- เศษส่วนอย่างต่ำ หมายถึง จำนวนในรูป $\frac{m}{n}$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่หรม.ของ m และ n เป็น 1

1. (กำหนดเวลา 4 นาที)

จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดที่ทำให้

$$\frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2} = \frac{85}{88}$$

2. (กำหนดเวลา 6 นาที)

จากการเก็บข้อมูลคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาฟิสิกส์ของนักเรียน 5 คน ได้ผลดังต่อไปนี้

นักเรียน	ทศพร	ธนาริป	อาลันณ์	พล	ชนุดม
คณิตศาสตร์	98	95	82	87	95
ฟิสิกส์	76	82	81	91	69

ให้ A เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์

B เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ของคะแนนวิชาฟิสิกส์

C เป็นสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์

D เป็นสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของคะแนนวิชาฟิสิกส์

จงเรียงลำดับ A, B, C, D จากมากไปน้อย

3. (กำหนดเวลา 4 นาที)

กำหนดให้ $[x]$ หมายถึง จำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าไม่เกิน x

ให้ l_1 และ l_2 เป็นเส้นตรง 2 เส้นที่แตกต่างกันที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(ก) ผ่านจุด $(0, 1)$

(ข) สัมผัสวงกลม $(x - 2006)^2 + (y - 2007)^2 = 1$

ให้ m_1 เป็นความชันของ l_1 และ m_2 เป็นความชันของ l_2

จงหา $[m_1 m_2]$

4. (กำหนดเวลา 5 นาที)

บันไดมีทั้งหมด 15 ขั้น บัณฑิตยต์ต้องการขึ้นบันไดโดยที่ในการก้าวแต่ละครั้ง เขาจะก้าวอย่างน้อย 3 ขั้น ยกเว้นในกรณีที่เป็นก้าวครั้งแรกหรือการก้าวครั้งสุดท้าย เขาอาจก้าวที่ขั้นก็ได้ จงหาว่าเขาจะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี

5. (กำหนดเวลา 4 นาที)

จงหาจำนวนคำตอบในช่วง $[0, 2\pi]$ ของสมการ $\sin x + \sin 15x + \sin 29x = 0$

6. (กำหนดเวลา 4 นาที)

ให้ F_n เป็นลำดับซึ่งกำหนดโดย $F_1 = 1, F_2 = 1$ และ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

จงหา $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{3^k}$ (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

7. (กำหนดเวลา 4 นาที)

วงกลม C_1 รัศมี 1 หน่วย และวงกลม C_2 รัศมี 4 หน่วย สัมผัสกันภายนอก ให้ k เป็นเส้นสัมผัสร่วมเส้นหนึ่งของวงกลมทั้งสอง โดยสัมผัส C_1 ที่จุด A_1 และสัมผัส C_2 ที่จุด A_2 ($A_1 \neq A_2$) วงกลม C_3 สัมผัสภายนอกกับวงกลม C_1 และ C_2 และสัมผัสเส้นตรง k กำหนดให้ C_3 มีรัศมีน้อยกว่า 1 หน่วย จงหารัศมีดังกล่าวนี้ (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

8. (กำหนดเวลา 7 นาที)

กล้าก้าววางเรือบนกระดาน 8×8 ทีละตัว โดยทำตามข้อปฏิบัติต่อไปนี้

(ก) เรือตัวแรกสามารถวางในช่องใดก็ได้

(ข) เรือตัวต่อไป เมื่อวางแล้วจะต้องสามารถกินเรือที่อยู่บนกระดานอยู่แล้วเป็นจำนวนคู่ตัว

จงหาว่า กล้าก้าวจะวางหมากได้อย่างมากที่สุด

(เรือ A สามารถกินเรือ B ได้ ก็ต่อเมื่อ เรือ A และเรือ B อยู่ในแถวเดียวกันหรือหลักเดียวกัน และไม่มีเรืออยู่ระหว่างเรือ A และเรือ B)

9. (กำหนดเวลา 3 นาที)

จากการสอบถามคน 100 คนเกี่ยวกับความชอบในด้านกีฬา พบว่าทุกคนชอบกีฬาอย่างน้อย 1 ชนิดใน 3 ชนิดที่สอบถาม คือ บาสเกตบอล เบสบอล และแบดมินตัน มีคน 28 คนที่ชอบทั้งบาสเกตบอลและแบดมินตัน มี 24 คนชอบบาสเกตบอลและเบสบอล มี 59 คนชอบเบสบอลหรือแบดมินตันแต่ไม่ชอบบาสเกตบอล มี 67 คนชอบแบดมินตัน และมี 45 คนที่ชอบกีฬาเพียงชนิดเดียว นอกจากนี้ มีคนที่ชอบแบดมินตันเพียงอย่างเดียวมากกว่าคนที่ชอบเบสบอลเพียงอย่างเดียวอยู่ 4 คน จงหาว่ามีกี่คนที่ชอบบาสเกตบอลเพียงอย่างเดียว

10. (กำหนดเวลา 5 นาที)

ให้ a, b, c, x, y, z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ไม่มีจำนวนใดเป็นศูนย์ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a = \frac{b+c}{x-2}, b = \frac{a+c}{y-2}, c = \frac{a+b}{z-2}$$

กำหนดให้ $xy + yz + zx = 2550$ และ $x + y + z = 2007$

จงหาค่าของ $xyz + 953$

11. (กำหนดเวลา 4 นาที)

กำหนดให้ a, θ เป็นจำนวนจริง

ให้ p เป็นความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดกำเนิดไปตั้งฉากกับเส้นตรง $x(\sec \theta) + y(\csc \theta) = a$ และ q เป็นความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดกำเนิดไป ตั้งฉากกับเส้นตรง $x(\cos \theta) - y(\sin \theta) = a(\cos 2\theta)$

จงหาค่า $\frac{p^2}{a^2 - q^2}$ (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

12. (กำหนดเวลา 4 นาที)

ให้จุดโฟกัสทั้งสองของวงรี G เป็นจุดเดียวกับจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ และความยาวแกนโทของ G เป็น 3 เท่าของความยาวของ latus rectum ของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(1, 1)$ แกนขนานกับแกน x และผ่านจุด $(-2, 3)$ ถ้าสมการของ G คือ $\frac{(x-h)^2}{a} + \frac{(y-k)^2}{b} = 1$ แล้ว จงหา $h + k + a + b$

13. (กำหนดเวลา 5 นาที)

จุด P อยู่ภายในสามเหลี่ยม ABC และทำให้มุม $\hat{P}AB, \hat{P}BC, \hat{P}CA$ มีขนาดเท่ากัน สามเหลี่ยม ABC มีด้านยาว 26, 28 และ 30 หน่วย จงหาค่า $\tan \hat{P}AB$ (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

14. (กำหนดเวลา 5 นาที)

สำหรับจำนวนเต็มบวก a, b ใดๆ ให้ $(a)_b$ เป็นพหุคูณของ b ที่มีค่าใกล้เคียง a มากที่สุด สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ ให้ $f(k) = (k)_3 + (2k)_5 + (3k)_7 - 6k$

จงหาเรนจ์ของ f

15. (กำหนดเวลา 3 นาที)

จงหาคู่อันดับ (m, n) ของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด ซึ่ง $m^2 - n^2 = 96$